

De stabiliteit van eenvoudige ‘ruimtelijke patronen’

– een mogelijk bachelorproject onder begeleiding van Arjen Doelman –

Een ‘ruimtelijk patroon’ $U(x, t)$ is – in wiskundige termen – een oplossing van een partiële differentiaalvergelijking (PDE). Zo’n PDE kan uiteenlopende verschijnselen als watergolven of de elektrische lading van een zenuwcel modelleren. Voor vaste t representeert U als functie van x een ‘patroon’: een (doorsnede van een) watergolf of de gelocaliseerde lading van een (lopende) elektrische puls. Een van de meest eenvoudige voorbeelden van zo’n model is onderstaande scalaire, 1-dimensionale, nietlineaire, reactie-diffusievergelijking,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(U), \quad (1)$$

met daarin $U(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ (uniform begrensd) en $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een gladde nietlineaire functie. Hoewel deze vergelijking op zichzelf veel te eenvoudig is als model voor een realistisch verschijnsel, treedt deze zeer vaak op als ‘building block’ in meer geavanceerde modellen – modellen die bijvoorbeeld verwoestijning beschrijven, of de formatie van complexe transportsystemen op subcellulair nivo. Eenvoudige stationaire oplossingen van (1) – ofwel, oplossingen van de gewone differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + F(u) = 0 \quad (2)$$

voor $U(x, t) = u(x)$ – zijn dan ook op allerlei manieren (en ‘in vermomming’) terug te zien aan de rand van woestijnen, of binnen een cel. Een (begrensd) oplossing $u^*(x)$ van (2) kan gezien worden als een kritiek punt van de PDE (1). Net als bij gewone differentiaalvergelijkingen kan je dus de vraag stellen: hoe gedragen oplossingen $U(x, t)$ van (1) zich ‘in de buurt’ van $u^*(x)$? Om deze vraag te (proberen te) beantwoorden introduceer je $V(x, t)$ door middel van $U(x, t) = u^*(x) + \varepsilon V(x, t)$, met ε ‘klein’ – ofwel $0 < \varepsilon \ll 1$ – en leid je vervolgens een vergelijking voor V af (...),

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F'(u^*(x))V + \varepsilon \times (\text{hogere orde termen}) \quad (3)$$

Deze vergelijking kan voor een belangrijk gedeelte begrepen worden door $\varepsilon = 0$ te stellen en $V(x, t)$ te schrijven als $V(x, t) = e^{\lambda t} v(x)$ met (a priori onbekende) eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{C}$; $v(x)$ is dan een oplossing van een Sturm-Liouville/Schrödinger vergelijking,

$$\mathcal{L}v = \left(\frac{d^2}{dx^2} + F'(u^*(x)) \right) v = \lambda v, \quad (4)$$

waarbij $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verondersteld wordt voldoende glad en begrensd op heel $\mathbb{R}$ te zijn. Als $u^*(x)$ een ‘gelocaliseerd patroon’ is – ofwel, als $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u^*(x) = P_{\pm}$ bestaat – dan kan λ slechts een eindig aantal discrete waarden aannemen (en is er altijd minstens 1 eigenwaarde). In dit project kun je gaan uitzoeken waarom dit zo is, en vooral ook: wat de waarden van deze λ_j ’s kunnen zijn. Immers, als $\text{Re}(\lambda) > 0$ dan zal $V(x, t) = e^{\lambda t} v(x)$ exponentieel groeien en is $u^*(x)$ dus instabiel. In dit kader is het bijvoorbeeld mogelijk in de (klassieke) theorie van ‘speciale functies’ te duiken, maar ook een meer geometrische aanpak is mogelijk. Tegelijkertijd kan er een meer moderne draai aan het project worden gegeven door de zogenaamde Evans functie $\mathcal{D}(\lambda)$ – een complex analytische afbeelding van $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvan de nulpunten samenvallen met de eigenwaarden van de operator $\mathcal{L}$ – horende bij het stabiliteitsprobleem (4) te gaan definiëren en vervolgens te bepalen.

Er zijn echter ook andere mogelijke paden te bewandelen/vragen te beantwoorden. Bijvoorbeeld: welke waarden van λ zijn mogelijk als $u^*(x)$ ruimtelijk periodiek is (i.e. als $u^*(x) = u^*(x + L)$ voor alle x en zekere $L > 0$)? Wat zijn de mogelijk stabiele stationaire patronen van (1)? (Alle periodieke patronen zijn instabiel: waarom?) Ook is het mogelijk een meer modelmatige kant op te gaan, bijvoorbeeld: hoe wordt zo’n vergelijking voor ‘complexe transportsystemen op subcellulair nivo’ afgeleid en waarom speelt (1) daarin een rol? Wat kan een eenvoudige oplossing $u^*(x)$ van (2) in deze context betekenen?

Hoe dan ook, de preciese inhoud van het project zal in overleg worden opgesteld.