

Gecodeerde topologie

Marcel de Jeu

Veronderstel dat X een compacte Hausdorffruimte is en laat $C(X)$ de ruimte van continue complexwaardige functies op X zijn, voorzien van de supremum-norm. We willen hierover nadenken als een gegeven ruimte X en een daaraan toegevoegd object $C(X)$ en vragen ons af hoeveel informatie over X we hierbij verliezen. Als we $C(X)$ op een nog precies te maken manier “kennen”, wat kunnen we dan over de topologische ruimte X zeggen?

Om een voorbeeld te nemen: als X en Y eindige verzamelingen zijn, voorzien van de discrete topologie, dan impliceert een isomorfie van $C(X)$ en $C(Y)$ als vectorruimten al dat X en Y homeomorf zijn als topologische ruimten. Immers, het aantal punten in X is dan de dimensie van $C(X)$, en net zo voor Y .

Voor algemene compacte ruimten is het niet zo eenvoudig meer, maar het antwoord is uiteindelijk verrassend simpel: als X en Y compacte Hausdorffruimten zijn, dan zijn $C(X)$ en $C(Y)$ isometrisch isomorf als Banachruimten dan en slechts dan als X en Y homeomorf zijn als topologische ruimten. Dat homeomorfie isomorfie impliceert is vrijwel onmiddellijk duidelijk, maar de andere implicatie volgt uit de veel minder flauwe stelling van Banach-Stone, die een expliciete beschrijving geeft van dergelijke isometrische isomorfismen.

De moraal van dit alles is dat bij de overgang van de compacte Hausdorffruimte X op $C(X)$ niets van de topologie verloren raakt: die wordt perfect gecodeerd door de isometrische isomorfielasse van $C(X)$. Dit kan nog wat preciezer geformuleerd worden: de categorie van compacte Hausdorffruimten, met homeomorfismen als morfismen, is equivalent met die van alle Banachruimten van de vorm $C(X)$, met isometrische isomorfismen als morfismen.

Er zijn varianten mogelijk om de topologie te coderen als functionaalanalytisch object. De reële $C(X)$ is niet alleen een Banachruimte, maar zelfs een Banachrooster (een Banachruimte met een geschikte ordening, hier de punts-gewijze) en de isomorfie van $C(X)$ en $C(Y)$ als Banachroosters is wederom equivalent met de homeomorfie van X en Y , iets wat dan ook weer leidt tot een uitspraak over equivalentie van categorieën. Verder is de complexe $C(X)$ een zgn. C^* -algebra en blijkt de categorie van compacte Hausdorffruimten, met continue afbeeldingen als morfismen, equivalent te zijn met de categorie van unitaire C^* -algebra's, met $*$ -homomorfismen als morfismen.

In dit project willen we een aantal van deze (klassieke) verbanden begrijpen en zien hoe de topologie en de functionaalanalyse hier hand in hand gaan.

Vereiste voorkennis: colleges Topologie en Linear Analysis.