

PERCOLATIE

Begeleider: Frank den Hollander

Percolatietheorie is het onderdeel van de stochastiek dat zich toelegt op de studie van configurationele eigenschappen van random netwerken. We kijken naar bindingpercolatie op $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$ (het d -dimensionale Euclidische rooster) en $\mathcal{T}_\sigma$, $\sigma \geq 2$ (de gewortelde boom met vertakingsgraad σ). Aan elke binding van het rooster kennen we een “random gewicht” toe, dat we uniform trekken uit het eenheidsinterval $(0, 1)$. De gewichten van verschillende bindingen zijn onafhankelijk.

Voor $p \in (0, 1)$, zij $C(p)$ de cluster van de oorsprong met parameter p , d.w.z. de verzameling van alle bindingen met gewicht $\leq p$ die aan elkaar hangen en de oorsprong bevatten. We zijn geïnteresseerd in de zgn. percolatiefunctie:

$$\theta(p) = \mathbb{P}(|C(p)| = \infty).$$

De opdracht is om de volgende feiten te bewijzen:

1. Er bestaat een $p_c \in (0, 1)$ zdd. $\theta(p) = 0$ voor $p < p_c$ en $\theta(p) > 0$ voor $p > p_c$.
2. Op $\mathcal{T}_\sigma$ kan $p \mapsto \theta(p)$ expliciet worden uitgerekend. Er geldt $p_c = 1/\sigma$.
3. Op $\mathbb{Z}^d$ is er met kans 1 een uniek oneindig cluster. Op $\mathcal{T}_\sigma$ is dit niet het geval.
4. De functie $p \mapsto \theta(p)$ is continu buiten p_c .

We zullen tevens een excursie maken naar invasiepercolatie. Dit is een dynamische versie van percolatie, waarbij we vanuit de oorsprong successievelijk een oneindig cluster groeien door steeds die binding aan de rand van het cluster toe te voegen dat het kleinste gewicht heeft. Het blijkt dat het invasiepercolatiecluster nauwe banden heeft met $C(p_c)$, de cluster van gewone percolatie bij de kritieke waarde p_c .