

Existentie en stabiliteit van eenvoudige ‘patronen’

– een mogelijk bachelorproject onder begeleiding van Arjen Doelman –

Een ‘ruimtelijk patroon’ $U(x, t)$ is – in wiskundige termen – een oplossing van een partiële differentiaalvergelijking (PDE). Zo’n PDE kan uiteenlopende verschijnselen als watergolven of de elektrische lading van een zenuwcel modelleren. Voor vaste t representeert U als functie van x een ‘patroon’: een (doorsnede van een) watergolf of de gelocaliseerde lading van een (lopende) elektrische puls. Een van de meest eenvoudige voorbeelden van zo’n model is onderstaande reactie-diffusievergelijking,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(U), \quad (1)$$

met daarin $U(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ (uniform begrensd) en $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een gladde functie. Hoewel deze vergelijking op zichzelf veel te eenvoudig is als model voor een realistisch verschijnsel, treedt deze zeer vaak op als ‘building block’ in meer geavanceerde modellen – modellen die bijvoorbeeld verwoestijning beschrijven, of de formatie van complexe transportsystemen op subcellulair nivo. Eenvoudige stationaire oplossingen van (1) – ofwel, oplossingen van de gewone differentiaalvergelijking,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + F(u) = 0 \quad (2)$$

voor $U(x, t) = u(x)$ – zijn dan ook op allerlei manieren terug te zien aan de rand van woestijnen, of binnen een cel. Een (begrensd) oplossing $u^*(x)$ van (2) kan gezien worden als een kritiek punt van de PDE (1). Je kan dus de vraag stellen: hoe gedragen oplossingen $U(x, t)$ van (1) zich ‘in de buurt’ van $u^*(x)$? Om deze vraag te beantwoorden introduceer je $V(x, t)$ door middel van $U(x, t) = u^*(x) + \varepsilon V(x, t)$, met ε ‘klein’ en leid je vervolgens een vergelijking voor V af,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F'(u^*(x))V + \varepsilon \times (\text{hogere orde termen}) \quad (3)$$

Deze vergelijking kan voor een belangrijk gedeelte begrepen worden door $\varepsilon = 0$ te stellen en $V(x, t)$ te schrijven als $V(x, t) = e^{\lambda t} v(x)$ met (a priori onbekende) eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{C}$; $v(x)$ is dan een oplossing van een Sturm-Liouville/Schrödinger vergelijking,

$$\mathcal{L}v = \left(\frac{d^2}{dx^2} + F'(u^*(x)) \right) v = \lambda v, \quad (4)$$

waarbij $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ verondersteld wordt voldoende glad en begrensd op heel $\mathbb{R}$ te zijn.

Vanaf dit punt kan het project in meerdere richtingen ‘uitwaaien’. Een leuke en recente richting is die van de ‘ruimtelijke inhomogeniteiten’. In het kader van (1) betekent dit dat de term $F(U)$ een ‘sprong’ maakt tussen $x < 0$ en $x > 0$. Dit creëert een onverwachte rijkdom aan patronen – als ‘pinned fluxons’ spelen dit soort oplossingen een belangrijke rol binnen processen in supergeleiders. Een andere mogelijke invalshoek is die van de Evans functie $\mathcal{D}(\lambda)$ horende bij het stabiliteitsprobleem (4); $\mathcal{D}(\lambda)$ is een complex analytische afbeelding van $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvan de nulpunten samenvallen met de eigenwaarden van de operator $\mathcal{L}$. De algemene theorie van Evans functies kan op een fundamenteel niveau in detail uitgewerkt worden in de context van vergelijkingen van het type (1), op zo’n manier dat deze een onmiddellijke opstap biedt naar meer geavanceerde methoden en technieken.

Hoe dan ook, de preciese inhoud van het project zal in overleg worden opgesteld.