

ONEINDIG VEEL GETALSONTWIKKELINGEN

BEGELEIDER: CHARLENE KALLE

De gebruikelijke manier om getallen te schrijven is met een positiestelsel, zoals bijvoorbeeld het decimale of binaire stelsel. Hierbij worden getallen uitgedrukt als een som van veelvouden van machten van het grondtal, bijvoorbeeld $125,3 = 10^2 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1}$. Het gebruiken van een geheel getal als grondtal heeft als voordeel dat de meeste getallen op een unieke manier geschreven kunnen worden als zo'n som. Bovendien weten we precies welke getallen niet op een unieke manier geschreven kunnen worden. Deze getallen hebben dan precies twee verschillende ontwikkelingen, bijvoorbeeld

$$\frac{3}{8} = 2^{-2} + 2^{-3} = 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + \dots$$

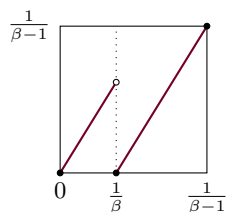
In plaats van een geheel grondtal, is het ook mogelijk om een niet-geheel grondtal als basis te gebruiken. Kies een basis β strikt tussen 1 en 2. Het blijkt dat we ieder getal x in het interval $[0, \frac{1}{\beta-1}]$ kunnen schrijven als

$$(1) \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\beta^k}, \quad \text{met } b_k \in \{0, 1\} \text{ voor iedere } k \geq 1.$$

De gebruikelijke manier om zo'n ontwikkeling te vinden is m.b.v. een algoritme zoals bv. het greedy algoritme, of met behulp van een afbeelding, zoals bv. de afbeelding T gegeven door

$$Tx = \begin{cases} \beta x, & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{\beta}, \\ \beta x - 1, & \text{if } \frac{1}{\beta} \leq x \leq \frac{1}{\beta-1}. \end{cases}$$

De afbeelding T ziet er zo uit:



Een belangrijke eigenschap van dit soort ontwikkelingen is dat veel getallen oneindig veel verschillende ontwikkelingen in dezelfde basis hebben.

De opdracht bestaat uit de volgende onderdelen:

- (1) Laat zien hoe we de afbeelding T kunnen gebruiken om ontwikkelingen te maken.
- (2) Bekijk andere mogelijke afbeeldingen die ontwikkelingen genereren.
- (3) Er bestaat een specifieke afbeelding die voor iedere x alle mogelijke ontwikkelingen in een bepaalde basis produceert. Omschrijf deze afbeelding.
- (4) Bewijs dat als β kleiner is dan de gulden snede $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dat dan alle getallen x strict tussen 0 en $\frac{1}{\beta-1}$ overaftelbaar veel verschillende ontwikkelingen hebben van de vorm (1).

Eventueel kunnen we kijken naar toepassingen hiervan bij het omzetten van analoge signalen naar digitale signalen.