

Onderwerp: irreguliere singuliere punten van lineaire differentiaalvergelijkingen

Begeleider: R.J.Kooman

We beschouwen differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$y^{(n)}(z) + p_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z) + \dots + p_1(z)y'(z) + p_0(z)y(z) = 0 \quad (*)$$

waarbij $z \in \mathbb{C}$ en $p_0, \dots, p_{n-1}$ rationale functies zijn. $z = z_0$ heet een singulier punt van (*) als z_0 een pool is van minstens een van de coëfficiënten $p_j(z)$, anders heet z_0 een gewoon punt. Rond een gewoon punt heeft (*) een fundamenteel systeem van (rond $z = z_0$) analytische oplossingen. De situatie is interessanter als z_0 een singulier punt is. Men onderscheidt twee gevallen: als z_0 een pool is van p_j van orde hoogstens $n - j$ (voor $j = 0, \dots, n-1$), dan heet z_0 een regulier singulier punt van de differentiaalvergelijking, in het andere geval is het een irregulier singulier punt. In het geval van een regulier singulier punt hebben we het resultaat van Fuchs dat er oplossingen zijn van de vorm $(z - z_0)^\sigma g(z)$ (voor zekere complexe getallen σ) waarbij $g(z)$ analytisch is in $z = z_0$. De getallen σ , de indices van de differentiaalvergelijking, zijn nulpunten van een zeker, expliciet te bepalen, polynoom. Deze oplossingen zijn dus (rond z_0) te schrijven in de vorm van een Frobeniusreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+\sigma}.$$

Het gedrag rond irreguliere singuliere punten is veel ingewikkelder en heel gevarieerd. Het doel van het onderzoeksproject is om hiervan een studie te maken.