

Tijdreeksen

Begeleider: Aad van der Vaart

Een tijdreeks is een rij stochastische variabelen $X_0, X_1, X_2, \dots$ die de toestand van een systeem op tijdstippen $0, 1, 2, \dots$ weergeeft. Een voorbeeld is het GARCH (1,1) model, een standaard ('bench mark') voor het beschrijven van financiële returns. Een 'return' is een relatieve verandering, bijvoorbeeld per dag, week of maand. De wiskundige beschrijving bestaat uit twee vergelijkingen. De eerste is dat de verwachte verandering gegeven het verleden nul is (martingaal eigenschap):

$$E(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = 0.$$

De tweede dat de verwachte varianties ('volatiliteit') gegeven het verleden

$$\sigma_t^2 = \text{var}(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots),$$

voldoen aan

$$\sigma_t^2 = \alpha + \theta X_{t-1}^2 + \phi \sigma_{t-1}^2.$$

De economen Engle en Granger ontvingen in 2003 een Nobelprijs, voor onder meer het bedenken van dit model. Het idee is dat financiële winst of verlies weliswaar niet voorspelbaar is, maar de grootte van de veranderingen (volatiliteit) wel.

Een van de wiskundige vragen die je kunt stellen is of de GARCH vergelijkingen een oplossing bezitten die stationair in de tijd is (in de zin van kansverdelingen). Het antwoord is bekend, maar niet heel makkelijk te bewijzen, omdat de vergelijkingen recursief zijn.

Het is daarom zinvol om het project te beginnen met een andere, eenvoudige recursieve vergelijking, voor het AR (1) model:

$$X_t = \theta X_{t-1} + Z_t,$$

waarin Z_t onafhankelijk, identiek verdeelde grootheden zijn. Deze vergelijking worden opgelost met behulp van theorie over reeksen van stochastische variabelen.

Daarna zijn er diverse mogelijkheden, zowel voor wiskundig bewijs-werk, als voor data-analyse en computer simulatie:

- Bestudeer (het bestaan van) oplossingen van de GARCH vergelijkingen.
- Bestudeer eigenschappen van de oplossingen.
- Simuleer realisaties van de tijdreeksen, bijvoorbeeld met behulp van het R pakket.
- Bestudeer hoe de parameters α, θ, ϕ in de vergelijkingen kunnen worden geschat uit een waargenomen tijdreeks $X_1, \dots, X_n$. Leidt een variant van de Maximum Likelihood methode af, en/of bestudeer software (R!) voor implementaties van deze methode.
- Pas de theorie toe op bijvoorbeeld AEX returns.