

# Complexificatie van geordende vectorruimten

Onno van Gaans

Een partieel geordende vectorruimte is een vectorruimte  $X$  over  $\mathbb{R}$  met een partiële ordening  $\leq$  zo dat voor alle  $x, y, z \in X$  en  $\alpha \in \mathbb{R}$  geldt dat

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

en

$$x \leq y, \alpha \geq 0 \implies \alpha x \leq \alpha y.$$

Een voorbeeld is de verzameling van continue functies  $C[0, 1]$  met  $f \leq g$  als  $f(s) \leq g(s)$  voor alle  $s \in [0, 1]$ . Als er voor iedere  $x$  en  $y$  in  $X$  een kleinste bovengrens  $x \vee y$  in  $X$  bestaat, dan heet  $X$  een *Rieszruimte* of *vectorrooster*. In dat geval heeft iedere  $x \in X$  een absolute waarde gedefinieerd door

$$|x| = x \vee (-x).$$

De ruimte  $C^1[0, 1]$  is een voorbeeld van een partieel geordende vectorruimte die geen Rieszruimte is (denk aan

Voor spectraaltheorie van operatoren is het belangrijk om als scalars alle complexe getallen te hebben. Een reële vectorruimte kun je complexificeren door combinaties  $x + iy$  te bekijken (als verzameling gezien geeft dit  $X \times X$ ). Als  $X$  een geordende vectorruimte is dan krijg je een partiële ordening op de reële elementen van  $X_{\mathbb{C}}$ . Als  $X$  een Rieszruimte is, dan kan de absolute waarde worden uitgebreid tot een afbeelding op de hele  $X_{\mathbb{C}}$  door

$$|x + iy| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} ((\cos \theta)x + \sin \theta)y$$

onder een voorwaarde op  $Y$ .

Veel theorie van partieel geordende vectorruimten maakt gebruik van de rijkere structuur van Rieszruimten door inbedding in een grotere Rieszruimte. Deze theorie is alleen bestudeerd voor het reële geval. Het doel van dit project is om te verkennen wat er in het complexe geval gebeurt.

Bijvoorbeeld: correspondeert ‘disjunctheid’ in een complexe partieel geordende vectorruimte met ‘disjunctheid’ in de grotere Rieszruimte? In de Rieszruimte heten  $x$  en  $y$  disjunct als  $|x| \wedge |y| = 0$ . In het reële geval is er een goede generalisatie naar partieel geordende vectorruimten.

Een meer topologische vraag is: welke seminormen op een complexe geordende vectorruimte corresponderen met Riesz seminormen op een grotere Rieszruimte? In het reële is dit weer bekend, maar in het complexe geval niet.

Bachelor Seminarium ASB  
voorjaar 2013