

Ruimten van Pettis-integreerbare functies

Onno van Gaans

In een artikel uit 1938 definieert Pettis een integraal voor functies van een eindige maatruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ met waarden in een Banachruimte $(X, \|\cdot\|)$. Als $f: \Omega \rightarrow X$ zo is dat

$$\omega \mapsto \varphi(f(\omega)): \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ } \mu\text{-integreerbaar is voor alle } \varphi \in X'$$

en

$$\text{er bestaat een } I \in X \text{ zo dat voor alle } \varphi \in X' \text{ geldt } \int_{\Omega} \varphi(f(\omega)) d\mu(\omega) = \varphi(I),$$

dan heet f Pettis-integreerbaar en I heet dan de Pettis-integraal van f . Een f die voldoet aan $\omega \mapsto \varphi(f(\omega)) \in L^p(\mu)$ (met $1 \leq p < \infty$) heet zwak p -integreerbaar en de ruimte $L_w^p(\Omega; X)$ van zulke functies is een Banachruimte met de norm

$$\|f\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left(\int_{\Omega} |\varphi(f(\omega))|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p}.$$

De deelverzameling $L_0^p(\Omega; X)$ van Pettis-integreerbare functies in $L_w^p(\Omega; X)$ is een (echte) deelruimte. Het doel van dit project is om de ruimten $L_0^p(\Omega; X)$ en $L_w^p(\Omega; X)$ te bestuderen.

Bijvoorbeeld de duale van $L_w^p(\Omega; X)$. Als $g \in L_w^q(\Omega; X')$ (met $1/p + 1/q = 1$), dan definieert

$$\psi(f) := \int_{\Omega} g(\omega)(f(\omega)) d\mu(\omega)$$

een begrensde functionaal $\psi: L_w^p(\Omega; X) \rightarrow \mathbb{R}$. Zijn alle functionalen van deze vorm?

Als $f \in L_0^p(\Omega; X)$, dan definieert

$$Th = \int_{\Omega} h(\omega)f(\omega) d\mu(\omega), \quad h \in L^q(\Omega; \mathbb{R}),$$

een operator $T: L^q(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow X$. Welke operatoren zijn van deze vorm?

Er staan antwoorden op deze vragen in het artikel van Pettis. Het grootste deel van het project zal bestaan uit het begrijpen en verwerken van de bewijzen.

De theorie van Pettis wordt tegenwoordig weer volop gebruikt in de theorie van ‘stochastische integralen’ in Banachruimten. Een vraag die daarvoor relevant is is de volgende. Als $f \in L_w^2(\Omega; X)$ Pettis-integreerbaar is en P is een orthogonale projectie in $L^2(\Omega; \mathbb{R})$, bestaat er dan een $I \in X$ zo dat

$$\int_{\Omega} P(\omega \mapsto \varphi(f(\omega))) d\mu(\omega) = \varphi(I)$$

voor alle $\varphi \in X'$? Afhankelijk van tijd en belangstelling kunnen ook zulke vragen worden onderzocht.

Bachelor Seminarium ASB
voorjaar 2013