

Afbeeldingen tussen $C(K)$ -ruimten

Marcel de Jeu

Wanneer X en Y Banachruimten zijn is de ruimte $B(X, Y)$ van alle begrensde lineaire operatoren van X naar Y ook weer een Banachruimte. Het is in het algemeen echter niet zo eenvoudig om $B(X, Y)$, of zelfs maar interessante deelverzamelingen hiervan, voor gegeven concrete X en Y expliciet te beschrijven. Een uitzondering hierop wordt gevormd door de Banachruimten $C(K)$ van alle continue (en voor het gemak reëelwaardige) functies op een compacte Hausdorffruimte K , voorzien van de supremumnorm.

De veel gebruikte Riesz representatiestelling vertelt ons dat $B(C(K), \mathbb{R}) = X^*$ samenvalt met een bepaalde klasse van maten op X , de zgn. reguliere Borelmaten. Anders gezegd: $B(C(K), C(\{\text{pt}\}))$, de Banachruimte van alle begrensde operatoren van $C(K)$ naar een éénpuntsverzameling, is “bekend”.

Voor algemene compacte Hausdorffruimten K_1 en K_2 , waarbij K_2 ook groter mag zijn dan één punt, is $B(C(K_1), C(K_2))$ te groot om in zijn geheel iets aantrekkelijks over te kunnen zeggen, maar dat lukt nog wel voor operatoren in $B(C(K_1), C(K_2))$ van bepaalde types, gerelateerd aan de extra structuur die ruimtes $C(K)$ hebben naast het feit dat het Banachruimtes zijn.

De ruimte $C(K)$ is bijvoorbeeld ook een algebra en het is mogelijk om de algebrahomomorfismen van $C(K_1)$ naar $C(K_2)$ te beschrijven in termen van continue afbeeldingen van K_2 naar K_1 .

Verder is een ruimte $C(K)$ ook op een natuurlijke manier een partieel geordende vectorruimte: zeg dat $f \geq g$ als dat puntsgewijs geldt. Met deze ordening is $C(K)$ een zgn. Banachrooster en ook de roosterhomomorfismen van $C(K_1)$ naar $C(K_2)$ kunnen dan weer expliciet beschreven worden.

Wanneer we weten dat $T \in B(C(K_1), C(K_2))$ een positieve operator is en de constante functie $\mathbf{1}$ op K_1 naar de constante functie $\mathbf{1}$ op K_2 afbeeldt (een zgn. Markovoperator), dan kan een en ander gecombineerd worden om te concluderen dat T een algebrahomomorfisme is precies dan wanneer T een roosterhomomorfisme is.

Het doel van het project is de theorie achter de beschrijving van algebra- en roosterhomomorfismen tussen $C(K)$ -ruimten te begrijpen. De Riesz representatiestelling is een verhaal apart en die beschouwen we daarom als een gegeven.

Voorkennis: colleges Topologie (verzamelingstheoretische deel), Measure Theory en Linear Analysis.