

**Bachelor seminarium Analyse, Stochastiek en Besliskunde
voorjaar 2014**

Titel project: Iteraties van functies

Begeleider: Frank den Hollander

Populatiodynamica is een onderdeel van de kansrekening en de analyse dat de evolutie bestudeert van individuen wiens *type* in de loop van de tijd verandert als gevolg van *interactie* met andere individuen en met de omgeving waarin de populatie leeft. De toestand van de populatie wordt met een variabele x aangeduid, die waarden aanneemt in een toestandsruimte X . Wanneer de tijd discreet is, dan doorloopt de toestand van de populatie achtereenvolgens de waarden $x_0, x_1, x_2, \dots$, waarbij x_k de toestand op tijdstip k is. Wanneer de begintoestand x_0 eenmaal is gekozen, dan worden de achtereenvolgende toestanden op iteratieve wijze bepaald volgens een *recursierelatie*

$$x_{k+1} = f_k(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

waarbij $f_k: X \rightarrow X$ een functie is die van k afhangt. Deze functie beschrijft hoe de toestand op tijdstip $k + 1$ verkregen wordt uit die op tijdstip k als gevolg van de eerder genoemde interactie. De vraag die ons interesseert is:

- Gegeven x_0 en $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, wat is het gedrag van x_k voor $k \rightarrow \infty$?

In dit project kiezen we $X = [0, \infty)$ en kijken we naar twee voorbeelden van f_k :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad f_k(x) &= \left[\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k + x} \right]^{-1}, \\ \text{(II)} \quad f_k(x) &= \mathbb{E} \left(\left[\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k Z + x} \right]^{-1} \right). \end{aligned}$$

Hier zijn $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ en $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gegeven rijen van $(0, \infty)$ -waardige parameters, en Z is een $(0, \infty)$ -waardige toevalsvariabele met kansverdeling $\mathbb{P}$ en gemiddelde $\mathbb{E}(Z) = 1$. Beide voorbeelden komen voort uit de studie van *hierarchisch georganiseerde DNA-populaties*, waarbij genetische informatie wordt uitgewisseld per generatie (1 tijdseenheid = 1 generatie), en x_k staat voor de *genetische variabiliteit*, a_k voor de *reikwijdte* van de interactie en b_k voor de *sterkte* van de interactie in generatie k . De toevalsvariabele Z modelleert het effect van de omgeving op de sterkte van de interactie.

De vraag die we onderzoeken is:

- Hoe hangt het schaalgedrag van x_k voor $k \rightarrow \infty$ af van dat van a_k and b_k ? Hoe verhouden de oplossingen voor (I) en (II) zich tot elkaar?

Een voorbeeld van een resultaat is het volgende. Indien $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k/a_k = K \in (0, \infty)$ en $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/a_{k+1} = 1$, dan geldt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k/a_k = M$, met M de unieke oplossing van de vergelijking

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad M &= \frac{(K+M)}{1+(K+M)}, \\ \text{(II)} \quad M &= \mathbb{E} \left(\frac{(KZ+M)}{1+(KZ+M)} \right). \end{aligned}$$

Het doel van het project is om tot een *complete classificatie* te komen van de verschillende soorten schalingsgedrag. Daarbij mag worden aangenomen dat aan bepaalde *regulariteitscondities* is voldaan, bijvoorbeeld

$$a_k \sim A k^\alpha, \quad b_k \sim B k^\beta, \quad k \rightarrow \infty,$$

met $A, B \in (0, \infty)$ constanten en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ exponenten.

Referenties:

- (1) A. Greven, F. den Hollander, S. Kliem, A. Klimovsky, Renormalisation of hierarchically interacting Cannings processes, [arXiv:1209.1856].
- (2) A. Greven, F. den Hollander, A. Klimovsky, The hierarchical Cannings process in random environment, manuscript in voorbereiding.