

De periodefunctie

Mogelijk bachelorproject onder leiding van Björn de Rijk en Arjen Doelman

Inleiding en motivatie

Vergelijkingen van de vorm

$$u_{xx} = g(u), \quad u \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

komen voor in de theorie van conservatieve mechanische systemen. Zo is de vergelijking voor de *harmonische oscillator* gegeven door

$$u_{xx} = -k^2 u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

waarbij $k \in \mathbf{R}_{>0}$ afhangt van de gravitatieconstante en de lengte van de slinger. Alle niet-triviale oplossingen van (2) hebben periode $2\pi/k$. Dit betekent dat een harmonische oscillator onafhankelijk van zijn uitwijking altijd dezelfde periode heeft (de slingerwet). Dit blijkt niet voor alle modellen van de vorm (1) te gelden. Immers, beschouw de vergelijking voor de *mathematische slinger*

$$u_{xx} = -k^2 \sin(u), \quad u \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Systeem (3) heeft Hamiltoniaan $H(u, \dot{u}) = \frac{1}{2}(\dot{u})^2 - k^2 \cos(u)$. De open annulus

$$\mathcal{A} = \{(u, \dot{u}) \in \mathbf{R}^2 : -\pi < u < \pi, -k^2 < H(u, \dot{u}) < k^2\},$$

in het fasevlak bestaat uit een familie (γ_h) , $h \in (-k^2, k^2)$ van periodieke banen; zie figuur 1. De banen γ_h zijn geparametriseerd via de levelcurve $\{(u, \dot{u}) \in \mathbf{R}^2 : H(u, \dot{u}) = h\}$ van de Hamiltoniaan waarin ze bevat zijn. De periode $T(h)$ van γ_h kunnen we uitdrukken als functie van h . Men noemt $T(h)$ de *periodefunctie* voor de familie (γ_h) , $h \in (-k^2, k^2)$.

Gezien de buitenrand van $\mathcal{A}$ bestaat uit twee heterocliene banen, geldt niet geheel onverwachts $\lim_{h \uparrow k^2} T(h) = \infty$. Andersom kan men aantonen dat geldt $\lim_{h \downarrow -k^2} T(h) = 2\pi/k$. Deze limiet van de periodefunctie, waarbij h het energieniveau van het centrumpunt nadert, wordt de *kritieke periode* genoemd. Merk op dat deze limiet precies gelijk is aan de (constante) periodefunctie van het lineaire systeem (2). Door handig gebruik te maken van de Hamiltoniaan, kan men aantonen

$$T(h) = \int_0^{\pi/2} \frac{4d\theta}{k \sqrt{1 - \frac{1}{2}(1 + \frac{h}{k^2}) \sin(\theta)}}.$$

Een dergelijke integraal wordt een elliptische integraal van de eerste soort genoemd. Met deze expliciete uitdrukking voorhanden kunnen we een plot van de periodefunctie $T(h)$ voor systeem (3) maken; zie figuur 2. We zien dat een mathematische slinger, naarmate de uitwijking groter wordt, een steeds grotere periode krijgt; oftewel de functie $T(h)$ is *monotoon*. Ook zien we dat $T(h)$ een asymptoot heeft voor $h = k^2$.

Het bepalen van de periodefunctie is van belang in de studie naar niet-lineaire oscillatoren. Zo speelt de periodefunctie van de integreerbare *Helmholtz oscillator* een rol in het onderzoek naar de invloed van getijden op vrijwel afgesloten bassins in oceanen en zeeën; zie bijvoorbeeld [4]. Deze oscillator voldoet aan vergelijking (1), waarbij g afhangt van de vorm van het bassin. Bekijk een familie van periodieke banen (γ_h) in het (Hamiltoniaanse) systeem (1), waarbij de banen γ_h weer geparametriseerd zijn via de levelcurves van de Hamiltoniaan $H(u, \dot{u}) = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \int_0^u g(v)dv$ waarin ze bevat zijn.

Laat $u_1(h) < u_2(h)$ de snijpunten van γ_h zijn met de u -as. We verkrijgen een impliciete uitdrukking voor de periodefunctie

$$T(h) = \int_{u_1(h)}^{u_2(h)} \frac{2du}{\sqrt{2(G(u) - h)}}, \quad (4)$$

met $G(u) = \int_0^u g(v)dv$. Als er geen expliciete uitdrukkingen voor $u_1(h)$ en $u_2(h)$ voorhanden zijn, is niet duidelijk hoe een expliciete uitdrukking van de periodefunctie gevonden kan worden. Kan wel aangetoond worden dat de periodefunctie monotoon is? En heeft $T(h)$ een asymptoot?

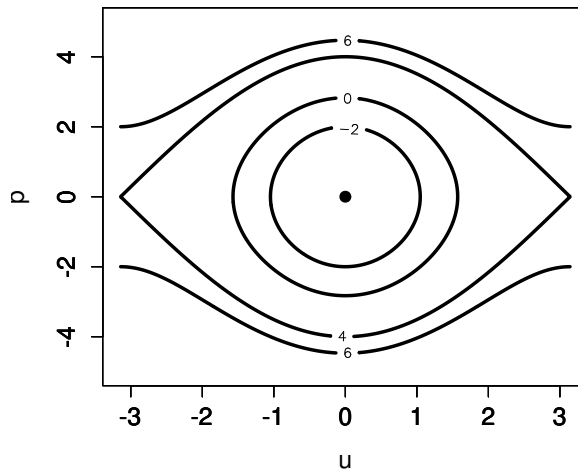


Figure 1: Het fasevlak van systeem (3) voor $k = 2$.

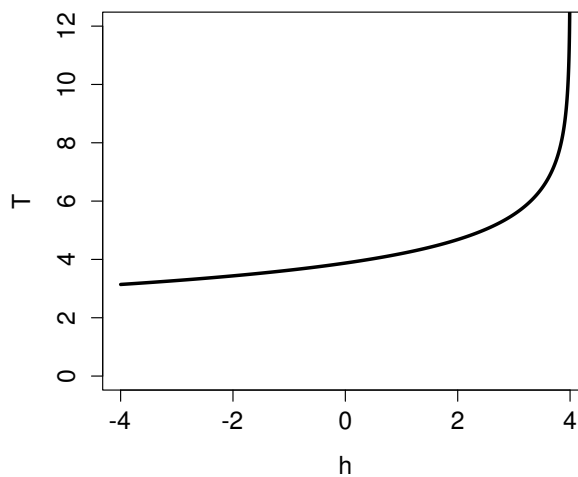


Figure 2: De periodefunctie $T(h)$ van systeem (3) voor $k = 2$.

Mogelijke onderzoeksvragen

Aan de hand van bovenstaande voorbeelden zijn de mogelijke onderzoeksvragen geformuleerd:

- Kan een vergelijking voor $T(h)$ zoals (4) worden opgesteld voor algemene (Hamiltoniaanse) systemen? Kun je uit zo'n vergelijking $T(h)$ bepalen zoals in figuur 2?
- Hoe kan de kritieke periode bepaald worden?
- In de plot in figuur 2 is te zien dat T monotoon (stijgend) is als functie van h . Is dit algemeen waar? Hoe toon je dit aan? Bestaat er wellicht een expliciet systeem waarvoor de functie niet monotoon is?
- Een centrum $(u^*, p^*) \in \mathbf{R}^2$ wordt *isochroon* genoemd als er een omgeving $V \subset \mathbf{R}^2$ van (u^*, p^*) bestaat zodanig dat elke baan in $V \setminus \{(u^*, p^*)\}$ periodiek is met *dezelfde* periode. Er volgt dat (2) een isochroon centrum heeft en systeem (3) niet; zie figuur 2. Bestaat er een niet-lineair analytisch systeem met een isochroon centrum? Kun je de systemen met isochrone centra karakteriseren? Bestaat er een analytisch systeem met zowel isochrone als niet-isochrone centra?
- De ambitieuze student kan ook gaan kijken naar het inverse probleem: gegeven een functie $T(h)$, bestaat er een (Hamiltoniaans) systeem met een familie (γ_h) van periodieke banen die $T(h)$ als periodefunctie heeft? Wat kun je zeggen over de gladheid van dit systeem? Aan toepassingen bij dit inverse probleem kun je denken aan een fysisch experiment waaruit de periodefunctie te meten is als functie van een parameter, maar waarbij we uiteindelijk geïnteresseerd zijn in de potentiaal van het systeem.
- ...

Over de periodefunctie bestaat al de nodige literatuur; zie bijvoorbeeld [1], [2], [3] en [5]. Sommige antwoorden op bovenstaande vragen zullen daarom in de literatuur te vinden zijn, maar zeker niet alle. Naast het bestuderen en eigen maken van de literatuur, zijn er daarom genoeg mogelijkheden tot eigen onderzoek. Een onderdeel hiervan kan zijn, dat de student zelf (vervolg)onderzoeksvragen formuleert en beantwoordt.

References

- [1] Chicone, C., The monotonicity of the period function for planar Hamiltonian vector fields, *J. Differential Equations* **69** (1987), pp. 310–321
- [2] Cima, A. and Gasull, A. and Mañosas, F., Period function for a class of Hamiltonian systems, *J. Differential Equations* **168** (2000), pp. 180–199
- [3] Cima, A. and Mañosas, F. and Villadelprat, J., Isochronicity for several classes of Hamiltonian systems, *J. Differential Equations* **157** (1999), pp. 373–413,
- [4] Doelman, A. and Femius Koenderink, A. and Maas, L.R.M., Quasi-periodically forced nonlinear Helmholtz oscillators, *Phys. D* **164** (2002), pp. 1–27.
- [5] Urabe M., Potential forces which yield periodic motions of a fixed period, *J. Math. Mech.* **10** (1961), pp. 569–578.