

Het ontstaan van patronen via een pitchfork bifurcatie

een mogelijk bachelorproject o.l.v. Lotte Sewalt en Arjen Doelman

Beschouw de volgende *partiële differentiaalvergelijking* (PDE):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} + F(\mathbf{U}), \quad (1)$$

met $\mathbf{U}(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ een vector van n coördinaten die afhangen van tijd t en ruimte x . De matrix D is een diagonaalmatrix met diffusiecoëfficiënten. Een dergelijk systeem van zogenaamde *reactie–diffusievergelijkingen* kom je tegen in beschrijvingen van talloze fenomenen in de biologie en natuurkunde. Voorbeelden van zulke fenomenen zijn begroeiing in woestijnen, of de verspreiding van populaties. Een oplossing van (1) wordt dikwijls een ‘patroon’ genoemd, en kan tijdsafhankelijk of juist stationair zijn. Een stationair patroon voldoet dus aan de *gewone* differentiaalvergelijking

$$0 = D \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} + F(\mathbf{U}). \quad (2)$$

In dit project kiezen we $x \in [0, 1]$ met passende randvoorwaarden en beginnen we eerst met

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha U + \hat{F}(U), \quad (3)$$

dat wil zeggen $n = 1$ met $F(U) = \alpha U + \hat{F}(U)$ met $\hat{F}$ kwadratisch of van hogere orde. Hierbij noemen we α de *bifurcatieparameter*. In het geval van verwoestijning zou α de regenval kunnen zijn, die af- of juist toeneemt. NB: Als het bifurcatie–jargon in deze tekst nog niet bekend is, betekent dat niet dat je het project niet kunt doen.

De focus van onze analyse van vergelijking (3) ligt op het begrijpen van de triviale, stationaire oplossing $U(x, t) \equiv 0$. De stabiliteit van dit ‘patroon’ wordt beschreven door de eigenwaarden $\lambda(\alpha) \in \mathbb{C}$, die men kan bepalen door middel van scheiden van variabelen. Deze eigenwaarden veranderen als functies van bifurcatieparameter α . De centrale vraag in onze analyse is wat er gebeurt met oplossingen in de buurt van $U \equiv 0$, wanneer het triviale patroon destabiliseert. Schieten alle oplossingen weg na verloop van tijd, of worden ze ‘opgevangen’ door een ander, stabiel patroon? In dat laatste geval, is er een niet–triviaal patroon ontstaan vanuit $U \equiv 0$, door het veranderen van de parameter. Antwoorden op dit soort vragen hangen sterk af van onze niet-lineariteit $\hat{F}$.

Over het scalaire voorbeeld (3) is al één en ander bekend in de literatuur. Als we aan (3) een tweede, zwakke, vergelijking toevoegen, komen we op onbekend terrein.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(U, V), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \varepsilon G(U, V), \end{cases} \quad (4)$$

waarbij $F(U, V) = \alpha U + \hat{F}(U, V)$ en $G(U, V) = \beta U + \gamma V + \hat{G}(U, V)$. De positieve constante ε is ‘klein’, waardoor de tweede vergelijking slechts ‘zwakke’ interactie heeft met de eerste. Wederom kijken we naar de destabilisatie van een triviaal patroon, nu $(U, V) = (0, 0)$, als gevolg van veranderende α . Wanneer $\hat{F}(U, V)$ kwadratische termen heeft, ondergaat het triviale patroon een transkritische bifurcatie, eventueel gevolgd door een Hopf bifurcatie. Echter, wanneer $\hat{F}(U, V)$ kubisch is, wordt het verhaal anders, en mogelijk veel interessanter. Dit soort niet–lineariteiten hebben vaak betrekking op fenomenen waarbij een zekere ‘anti–symmetrie’ (bv $U \rightarrow -U$) aan de orde is. Nu ondergaat $(U, V) \equiv (0, 0)$ een pitchfork bifurcatie, en zijn er twee aftakkende patronen. De vraag is uiteindelijk wat er zal gebeuren met die twee patronen, onder invloed van α . Uiteraard zijn er nog verdere uitbreidingen mogelijk.

Steekwoorden: bifurcaties, Fourieranalyse, asymptotiek, partiële differentiaalvergelijkingen, patroonformatie.