

De duality map

Onno van Gaans

Voor een punt $x \neq 0$ in een Banachruimte E (over $\mathbb{R}$) is volgens de stelling van Hahn-Banach de verzameling J_x van alle ϕ in de duale ruimte E' met

$$\phi(x) = \sup\{\psi(x) : \psi \in E' \quad \|\psi\| \leq 1\}$$

niet leeg. Bovendien is $\phi(x) = \|x\|$ voor alle $\phi \in J_x$. Als de norm van E buiten 0 Gâteaux differentieerbaar is (bijvoorbeeld als E' *strict convex*), dan bestaat J_x uit precies één punt. De *duality map* $j: E \rightarrow E'$ is dan gedefinieerd door $j(x) \in J_x$ voor $x \neq 0$ en $j(0) = 0$. Als E een Hilbertruimte is, dan is j linear (de “identiteit”). Over het algemeen is j helemaal niet lineair en daarom zal voor een lineaire deelruimte D van E de verzameling $j(D)$ meestal geen lineaire deelruimte zijn. Bruce Calvert bewees in 1975 de volgende verrassende stelling: voor een reflexieve strict convexe Banachruimte E waarvan de norm Gâteaux differentieerbaar is op $E \setminus \{0\}$ en een gesloten lineaire deelruimte D van E is $j(D)$ een lineaire deelruimte dan en slechts dan als er een lineaire operator $P: E \rightarrow E$ bestaat met $P^2 = P$ (dat wil zeggen: P is een projectie) en $\|P\| \leq 1$ zo dat $D = P(E)$.

Het project heeft tot doel om de duality map en de stelling van Calvert nader te onderzoeken. Zijn er Banachruimten E met niet-differentieerbare norm waar J_x uit één punt bestaat voor iedere $x \neq 0$? De meetkundige interpretatie van de duality map en de relatie met de afgeleide van de norm kan ook bekeken worden. Kun je de norm reconstrueren uit de duality map? Wat betreft de stelling van Calvert is het interessant om te onderzoeken of de voorwaarden van reflexiviteit, strict convexiteit, differentieerbare norm en normvolledigheid verzwakt kunnen worden.

1. R.E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
2. B. Calvert, Convergence sets in reflexive Banach spaces, *Proc. Amer. Soc.* **47** (1975), 423–428.
3. B. Lemmens and O. van Gaans, On one-complemented subspaces of Minkowski spaces with smooth Riesz norms, *Rocky Mountain J. Math.* **36** (2006), no. 6, 1937–1955.

Bachelor Seminarium ASB
voorjaar 2014