

Het beeld van de verzameling van stationaire punten

Onno van Gaans

Een functie met afgeleide functie gelijk aan nul is constant. Als $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is en

$$S_f = \{x \in \mathbb{R}: f'(x) = 0\},$$

dan kan men bewijzen dat $f(S_f)$ hoogstens aftelbaar is. Voor een willekeurige $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kunnen we ook kijken naar de verzameling van stationaire punten

$$A_f = \{x \in \mathbb{R}: f \text{ is differentieerbaar in } x \text{ en } f'(x) = 0\}.$$

Volgens een stelling van Lusin [2, Corollary 21.5] is $f(A_f)$ een nulverzameling (een Lebesgue meetbare verzameling met maat 0). Het bewijs van deze stelling is veel moeilijker dan voor het geval dat f continu differentieerbaar is.

In het eerste deel van het project moeten de stelling van Lusin en het bewijs bestudeerd worden. Vervolgens kunnen gerelateerde vragen worden onderzocht. Kun je een functie f maken zo dat $f(A_f)$ overaftelbaar is? Is er iets speciaals aan de verzamelingen $f(A_f)$ of kun je zo iedere nulverzameling krijgen? Verder is het interessant om meerdimensionale versies te onderzoeken. Geldt een vergelijkbare stelling voor $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$? En voor functies van een Banachruimte naar $\mathbb{R}$?

Kennis van maattheorie is niet noodzakelijk maar wel handig.

1. H.L. Royden, *Real analysis*, Pearson, 1988.
2. W.H. Schikhof en A.C.M. van Rooij, *A second course on real functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

Bachelor Seminarium ASB
voorjaar 2014