Goniometrie

1) Welk beeld kun je hebben bij $\sin(\frac{1}{6}\pi)$?

a) Meetkunde
in rechthoekige driehoek:
sinus is verhouding van overstaande zijde en schuine zijde

b) Cirkelbeweging/ parameterkromme
In eenheidscirkel: sinus is de hoogte
x=cos(t)
y=sin(t)

c) Harmonische beweging: golf (functies en grafieken)
Sinus is functie met golf als grafiek

2) Hoe onthoud je de exacte waarden? Hoe redeneer je?
ViaOnthouden meetkunde, cirkelbeweging of golfgrafiek

$\sin(\frac{1}{3}\pi)$

$\sin(1\frac{1}{3}\pi)$

$\cos(3\pi)$

3) Bij vergelijkingen x of sin(x) als variabele (in eerste instantie) zien.
   a) los op: $\sin(2x) = \sin(3x)$ x als variabele, cat 1 vgl.
   b) los op: $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ sin(x) als variabele, cat 2 vgl
   c) los op: $\cos^2 x + \sin(x) = \frac{1}{4}$ sin(x) als variabele, cat 6 vgl
   d) los op: $\sin(2x) = 2.\cos(x)$ sin(x) als variabele, cat 6 vgl

4) Manipuleren van expressies:
Argument van sinus veranderen:

$$-\sin(x) = \sin(-x)$$

$$-\cos(x) = \cos(\pi - x)$$

$$\cos(x) = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$$

$$\sin(x) = \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$$

Splitsen van argument: somformules

o.a. $\sin(x+y) = \sin(x).\cos(y) + \sin(y).\cos(x)$

Argument verdubbelen of halveren: verdubbelingsformules

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

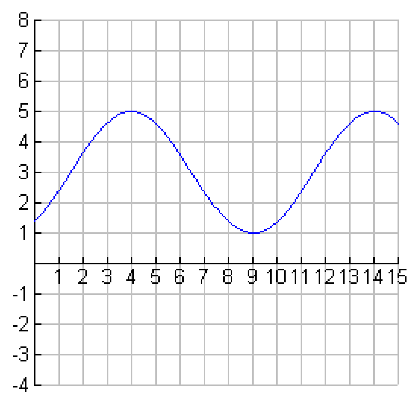
$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

$\sin(2x) = 2\sin(x).\cos(x)$ $\sin(2x) = 2\sin(x).\cos(x)$

Optellen van sinussen of cosinussen:

o.a. $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2}).\cos(\frac{x-y}{2})$

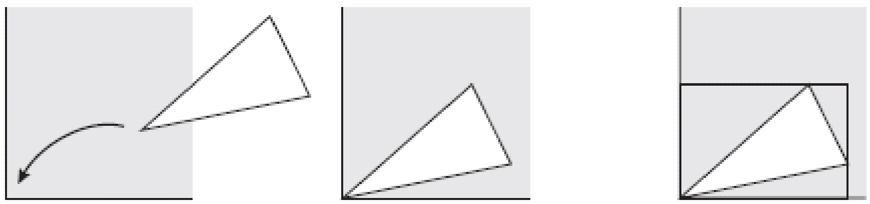
Soorten opdrachten per categorie:

Meetkunde	Cirkelbeweging/ parameterkromme	Harmonische beweging: golf (functies en grafieken)
in rechthoekige driehoek: sinus is verhouding van overstaande zijde en schuine zijde	In eenheidscirkel: sinus is de hoogte x=cos(t) y=sin(t) en Lissajousfiguren	Sinus is functie met golf als grafiek Later andere periodieke bewegingen zoals $y = \sin^2 x$
Zie bijlage 1	Zie bijlage 3	Zie bijlage 2
Gegeven rechthoekige driehoek met *BC*=20 en $\angle A = 60^0, \angle B = 90^0$ Bereken *AC*	$x(t) = 2\cos(t)$ $y(t) = \cos(2t) - 1$ Bij een gegeven parameterkromme bijv. a) Bereken snijpunten met x-as en y-as b) Bereken maximale x- of y waarde c) Beschrijf de grafiek met een formule van de vorm $y = a.x^2 + b.x + c$	Verband tussen grafiek en formule $y = a + b.\sin(c(x+d))$ via evenwichtswaarde, amplitude, periode en verschuiving a) Teken de grafieken als formule gegeven is: $y = 2\sin(x); y = 2 + \sin(x); y = \sin(x-2); y = \sin(2x)$ b) Maak een formule als de grafiek gegeven is: 
Sinusregel Gegeven driehoek *ABC* met *BC*=40 en $\angle A = 60^0, \angle B = 45^0$ Bereken *AC*		Exact oplossen van vgl^n zoals a) $\sin(x) = 0, +/-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $1 - 2\cos(3x) = 0$ c) $\sin(\frac{1}{2}\pi - 3x) = \cos(2x)$ d) Bereken voor welke n geldt dat $1 + (\sin(\frac{1}{6}\pi))^2 + \cos(\frac{1}{6}\pi.n) = \frac{1}{4}$
Cosinusregel Gegeven driehoek *ABC* met *BC*=30 en *AB*=40 en $\angle B = 60^0$ Bereken *AC*	Snelheid van punt is $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$	Afgeleiden van $f(x) = 1 - \cos^2(x)$ $g(x) = 2 + 3\cos(2t)$ $h(x) = (\sin(2x))^2$ $j(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)}$

		Maximum (grootte en bijbehorende x-waarde) van a) $y = 2\cos(4x) - 1$ b) $y = 2 + 3\sin(\frac{1}{6}\pi(x+5))$ c) $y = 4.\sin^2(x) - 4.\sin(x)$
		Integralen: a) Bereken $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \sin(3x)dx$ b) Bereken de oppervlakte tussen de x-as en de grafiek van $y = \sin(\frac{1}{6}\pi x)$ tussen x=0 en het eerst volgende snijpunt.
		Herschrijven van formules zoals a) Toon aan dat $y = 1 + (\sin(x))^2$ te schrijven is als $y = 1,5 - 0,5.\cos(2x)$ b) $y = (\sin(2x))^2$ uitdrukken in enkel $\sin(x)$ c) $y = \cos(4x)$ uitdrukken in enkel $\cos(x)$ d) $y = 1 + \sin^2(x) + \cos(2x)$ omschrijven tot de vorm $y = a + b.\sin(c(x+d))$ e) Toon aan dat de afgeleide van $f(x) = \cos(x).\cos(\frac{1}{3}\pi - x)$ gelijk is aan $f'(x) = \sin(\frac{1}{3}\pi - 2x)$ f) Toon aan dat $(3\sin(2\pi t) - 2\sin(\frac{1}{6}\pi t))^2 + (3\cos(2\pi t) - 2\cos(\frac{1}{6}\pi t))^2$ gelijk is aan $13 - 12\cos(\frac{11}{16}\pi t)$ g) $y = \sin(x) + \sin(3x)$ omschrijven tot $y = 4\sin(x) - 4\sin^3(x)$

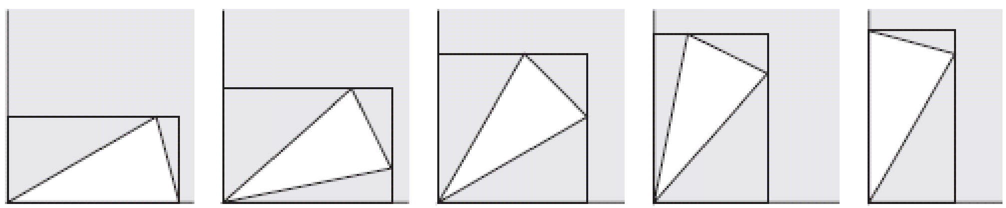
Bijlage 1
Uit CSE 2005: meetkunde

figuur 4



Een gelijkbenige driehoek met een tophoek van 30° ($\frac{1}{6}\pi$ radialen) en twee zijden van lengte 1 wordt op een rechthoekig blaadje papier gelegd met de top in een hoekpunt van het papier. Zie figuur 4.
Vervolgens wordt door elk van de andere hoekpunten van de driehoek een lijn getrokken evenwijdig aan een rand van het blaadje. Door de getekende lijnen en de randen van het blaadje papier wordt zo een rechthoek gevormd.

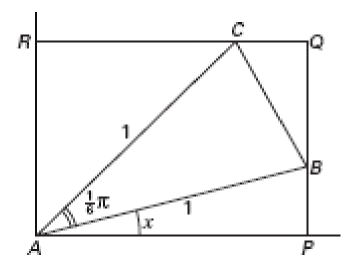
figuur 5



In figuur 5 is bij vijf verschillende posities van de driehoek de bijbehorende rechthoek getekend.

In figuur 6 zijn voor een willekeurige situatie letters bij de hoekpunten gezet.
Om driehoek ABC met tophoek A is rechthoek $APQR$ gevormd.
Bij elke stand van driehoek ABC hoort een hoek PAB. Noem de grootte van deze hoek x radialen, dus $\angle PAB = x$, met $0 \leq x \leq \frac{1}{3}\pi$.
Verder is $AB = AC = 1$ en $\angle BAC = \frac{1}{6}\pi$.

figuur 6

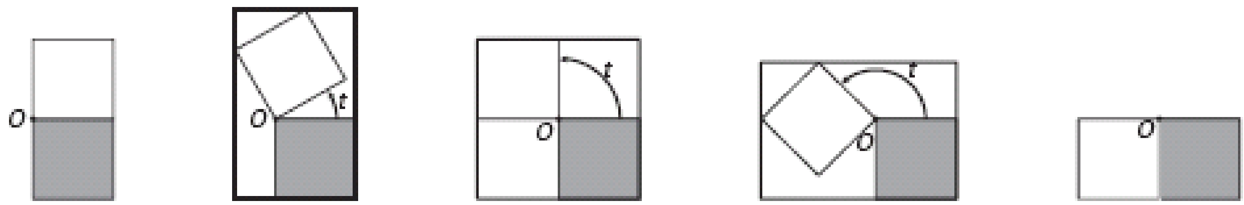


De oppervlakte van rechthoek $APQR$ is een functie van x en wordt aangegeven met $O(x)$.
Er geldt: $O(x) = \cos x \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi - x)$.

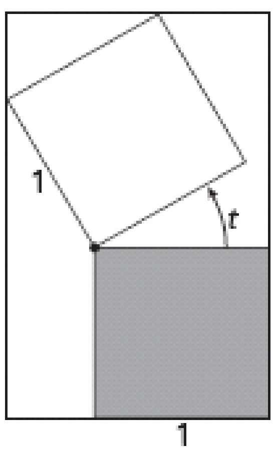
Toon deze formule aan.

Uit CSE 2003: meetkunde

Twee vierkanten, beide met zijde 1, hebben het hoekpunt O gemeenschappelijk. Het onderste vierkant ligt vast. Het bovenste vierkant wordt om O gedraaid; t is de draaihoek in radialen. In figuur 2 zijn tussen de begin- en eindstand drie tussenstanden getekend. Om de twee vierkanten is steeds een zo klein mogelijke rechthoek getekend, met twee zijden langs het vaste vierkant.



De oppervlakte R van de omhullende rechthoek is een functie van de draaihoek t.



Voor elke waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ geldt: $R = (1+\sin(t))(1+\sin(t)+\cos(t))$

Toon de juistheid van deze formule aan.

Bijlage 2
Uit CSE: functies en grafieken

Op het domein $[0, 2\pi]$ zijn gegeven de functies:
$f_n(x) = 1 + \sin^2 x + \cos nx$ waarbij n een positief geheel getal is.

De grafiek van f_n gaat voor bepaalde waarden van n door het punt $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4})$.
Onderzoek voor welke waarden van n tussen 0 en 50 dit geldt.

$f_4(x)$ is te schrijven als $f_4(x) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \cos 4x$.

Toon aan dat dit juist is.

Gegeven is de rechthoek $OABC$ met $A(2\pi, 0)$ en $C(0, 3)$.
De grafiek van f_4 verdeelt deze rechthoek in twee gebieden.
Toon aan met behulp van integreren dat deze twee gebieden exact dezelfde oppervlakte hebben.

Bijlage 3
Opgave parameterkromme
De baan van een punt P wordt gegeven door de bewegingsvergelijkingen:
$x = 2.\cos(t)$
$y = 3.\sin(2t)$

a) Bereken de (exacte) coordinaten van de snijpunten van deze baan met de x-as.

b) Bereken de coordinaten en tijdstippen van punten P met maximale y-coordinaat.

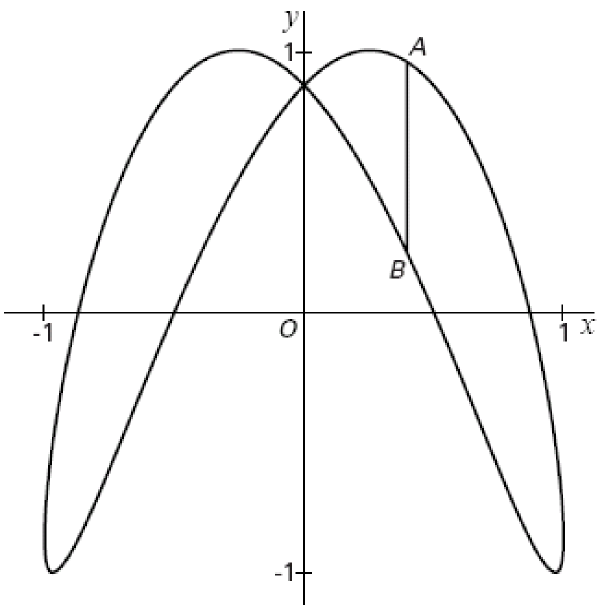
De baan van P kan ook beschreven worden met een formule waarin y uitgedrukt wordt in x.
c) Geef deze formule.

Uit CSE: parameterkromme

De baan van een punt P wordt bepaald door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(2t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases}$$

Zie figuur 3.



Bereken de coördinaten van de snijpunten van de baan met de x-as.

P passeert de y-as steeds met dezelfde snelheid.
Bereken de exacte waarde van deze snelheid.

Op het tijdstip $t = a$ bevindt het punt P zich in A en op het tijdstip $t = \pi - a$ in B, met $0 < a < \frac{1}{2}\pi$. A en B liggen op een verticale lijn. Zie figuur 3.
Bewijs dat de lengte van AB gelijk is aan $\sin 2a$.