Reading Course Semigroup Theory
Opgavenserie 2

1.) (A delay equation in a Hilbert space.) Let $L\colon C[-1,0] \to \mathbb{R}$ be a bounded linear functional. Consider the evolution equation

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + L\left(\theta \mapsto \int_\theta^{\theta+t} x(s)\,\mathrm{d}s\right), & t \geq 0, \\ x = u \text{ a.e. on } [-1,0). \end{cases} \tag{1}$$

It is known that for every $\alpha \in \mathbb{R}$ and $u \in L^2[-1,0]$ there exists a unique function $x \in L^2_{loc}[-1,\infty)$ satisfying (1). (Recall that $x \in L^2_{loc}$ means that on every bounded interval x is square integrable.) Moreover, $x|_{[0,\infty)}$ is continuous. Denote this solution by $x^{(\alpha,u)}$. It is also known that

$$T(t)(\alpha,u) := (x^{(\alpha,u)}(t), x_t^{(\alpha,u)}), \quad (\alpha,u) \in \mathbb{R} \times L^2[-1,0],\ t \geq 0,$$

defines a C_0-semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$ on the Hilbert space $\mathbb{R} \times L^2[-1,0]$ with norm given by $\|(\alpha,u)\|^2 = \alpha^2 + \|u\|_2^2$. For a function $x\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}$, x_t denotes the function

$$x_t(\theta) := x(t+\theta), \quad \theta \in [-1,0].$$

(a) Show that if $u \in C[-1,0]$ and $\alpha = u(0)$, then $x = x^{(\alpha,u)}$ is continuously differentiable on $(0,\infty)$ and

$$x'(t) = Lx_t, \quad t > 0.$$

(You may use that $\int_0^t x(s+\theta)\,\mathrm{d}s = \left(\int_0^t x_s\,\mathrm{d}s\right)(\theta)$, where the latter integral denotes the Bochner integral.)

(b) Let $D := \{(\alpha,u) \in \mathbb{R} \times L^2[-1,0]\colon\ u \in W^{1,2}[-1,0],\ \alpha = u(0)\}$, where

$$\begin{aligned} W^{1,2}[-1,0] &= \{u \in L^2[-1,0]\colon\ u \text{ absolutely continuous} \\ &\qquad \text{and } u' \in L^2[-1,0]\} \\ &= \{u \in L^2[-1,0]\colon\ \exists v \in L^2[-1,0] \text{ such that} \\ &\qquad u(t) - u(s) = \int_s^t v(r)\,\mathrm{d}r\ \forall -1 \leq s \leq t \leq 0\}. \end{aligned}$$

Show that the generator $(A, D(A))$ of $(T(t))_{t\geq 0}$ satisfies $D(A) = D$ and find an expression for A.
(Hint: for the second component [Engel-Nagel, II.2.10 Proposition 1(ii)] may be useful.)

(c) Show that the point spectrum of A equals $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon L(\theta \mapsto e^{\lambda\theta}) = \lambda\}$.

(d) Show: if $\ell \in \mathbb{R}$ and $Lu = \ell u(0)$ for all $u \in C[-1,0]$, then there exists a $c_0 \geq 0$ such that $\|T(t)\| \leq c_0 e^{\ell t}$ for all $t \geq 0$.

(e) Suppose $M \colon L^2[-1,0] \to \mathbb{R}$ is a bounded linear functional, $\ell > c_0\|M\|$, and $Lu = -\ell u(0) + Mu$, for all $u \in C[-1,0]$. Show that there exist $c \geq 0$ and $\omega > 0$ such that $\|T(t)\| \leq ce^{-\omega t}$ for all $t \geq 0$.
(Hint: bounded perturbation, variation-of-parameters formula, and Gronwall's lemma.)

2.) For $u \in C[-1,0]$ let the function $x^u \colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}$ be defined by $x^u(\theta) = u(\theta)$ for $\theta \in [-1,0]$ and, inductively,

$$x^u(n+1+\theta) = x^u(n) + \int_{n-1}^{n+\theta} x^u(s)\,\mathrm{d}s, \quad \theta \in [-1,0], \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Define for $t \geq 0$,

$$(T(t)u)(\theta) := x^u(t+\theta), \quad \theta \in [-1,0],$$

for $u \in C[-1,0]$.

(a) Show that $(T(t))_{t\geq 0}$ is a C_0-semigroup on $C[-1,0]$.

(b) Define

$$(Tu)(\tau) := u(0) + \int_0^\tau u(s-1)\,\mathrm{d}s, \quad \tau \in [0,1],$$

for $u \in C[-1,0]$. Show that T is a compact operator in $C[-1,0]$.
(Hint: use the Arzela-Ascoli theorem.)

(c) Show that $(T(t))_{t\geq 0}$ is eventually compact.

Since $T(1)$ is a positive operator (i.e., maps positive functions to positive functions), the Krein-Rutman theorem yields that the spectral radius $r(T(1))$ is an eigenvalue of $T(1)$ (with a positive eigenfunction).

(d) Show that the growth bound ω_0 of $(T(t))_{t\geq 0}$ is the unique real solution of $\exp(\frac{1}{\omega}) = \omega$.

3.) Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar zijn op heel $\mathbb{R}$ en veronderstel, dat $f(0) = 0$. Laat $n \geq 1$. f definieert de Nemytskii of superpositie-operator N_f op $C_0(\mathbb{R}^n)$ door

$$N_f(\varphi)(x) := f(\varphi(x)). \tag{2}$$

(a) laat zien, dat $N_f : C_0(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ lokaal Lipschitz continu is.

De afbeelding N_f gegeven door (2) beeldt de vectorruimte van (equivalentieklassen van) meetbare functies op $\mathbb{R}^n$ in zichzelf af. Laat nu $|\cdot|$ een norm zijn op $\mathbb{R}^n$. Veronderstel, dat f voldoet aan

$$|f(x)| \leq C|x|^\alpha \tag{3}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ voor zekere constanten $C > 0$ en $\alpha > 0$.

(b) Ga na, dat N_f $L^p(\mathbb{R}^n)$ afbeeldt in $L^{p/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ voor p zo, dat $\alpha \leq p < \infty$ en voor $p = \infty$.

Stel nu, dat $\alpha \geq 1$ en dat bovendien

$$|f'(x)| \leq C'|x|^{\alpha-1} \tag{4}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ voor zekere constante $C' > 0$.

(c) Laat zien, dat onder condities (3) en (4) geldt, dat $N_f : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ lokaal Lipschitz continu is voor $\alpha \leq p < \infty$.

(Hint: gebruik, (i) dat

$$f(x) - f(y) = v \int_0^1 f'(y + tv)dt, \qquad \text{met } v := x - y.$$

(ii) Hölder's ongelijkheid en (iii) eventueel Minkowski's Ongelijkheid voor Integralen:

$$\left\| \int f(\cdot, y)dy \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p dy. \quad)$$

(d) laat $f(x) = -x^3 + x$. Beargumenteer waarom N_f lokaal Lipschitz continu is van de Banach ruimte $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^{3p}(\mathbb{R}^n)$ (voorzien van de norm $\|\varphi\| := \|\varphi\|_p + \|\varphi\|_{3p}$) naar $L^p(\mathbb{R}^n)$.

4.) Laat $(T(t))_{t\geq 0}$ de diffusiesemigroep zijn in $L^p(\mathbb{R})$ met generator $(\Delta, \mathcal{D}(\Delta))$ $(1 \leq p < \infty)$. Het is bekend, dat $T(t)$ voor $t > 0$ wordt gegeven door de convolutie

$$T(t)f(x) := h(\cdot, t) * f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x - y, t)f(y)dy,$$

waarbij de h de warmtekern is:

$$h(x, t) = \tfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

(a) Bereken $\|h(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}$ voor $t > 0$ en $1 \leq p < \infty$.

(b) Gebruik de zogenaamde Young Ongelijkheid voor convolutieproducten en onderdeel (a) om te laten zien, dat voor $t > 0$ de semigroep operator $T(t)$ een continue lineaire afbeelding is van $L^p(\mathbb{R})$ in $L^r(\mathbb{R})$ voor alle $p \leq r < \infty$, en dat

$$\|T(t)\| \leq Ct^{\frac{1}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}$$

voor zekere constante C, onafhankelijk van t.

(c) Gebruik onderdeel (b) om te bewijzen, dat

$$\int_0^t T(t-s)f(s)ds \in L^r(\mathbb{R})$$

voor alle $f \in L^q([0,t], L^p(\mathbb{R}))$ wanneer $r \geq p$ en $q > [1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})]^{-1}$.

(c) Laat zien, dat voor $1 \leq p \leq q < \infty$ en alle s die voldoen aan $p \leq s \leq q$ de Banachruimte $L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ continu inbed in $L^s(\mathbb{R})$, in het bijzonder dat geldt:

$$\|f\|_s \leq 2^{1/s}(\|f\|_p + \|f\|_q)$$

voor alle $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$.
(Hint: beschouw de functie $g := f/(\|f\|_p + \|f\|_q)$ en bepaal een schatting voor $\|g\|_s^s$.)

(e) Gebruik de voorgaande resultaten om te laten zien, dat het beginwaardeprobleem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u^3 + u$$
$$u(0) = u_0$$

voor iedere beginwaarde u_0 voor eindige tijd een unieke milde oplossing heeft in $L^p(\mathbb{R}) \cap L^{p'}(\mathbb{R})$, wanneer $1 \leq p < \infty$ en $3p \leq p' < \infty$.

Inleveren uiterlijk 2 juli 2007

Sander Hille en Onno van Gaans
vangaans@math.leidenuniv.nl
Leiden, juni 2007