Week 2: Combinatoriek I

Combinatoriek is de wiskunde van het tellen. Hiertoe behoren vragen als 'Op hoe veel manieren kan je 8 torens op een schaakbord plaatsen zodat geen tweetal elkaar kan slaan?' en 'Hoe veel reeksen bestaande uit 1'en en 2'en bestaan er met som n?'. Belangrijke functies om te kennen voor $0 \leq m \leq n$ zijn

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n \quad \text{en} \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Hoewel de meeste identiteiten in deze set algebraisch of met inductie bewezen kunnen worden, is het een kunst om hier een *combinatorisch bewijs* van te geven.

Voorbeeldopgave 1 *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$.*

We doen dit door $(n+1)\cdot n!$ en $(n+1)!$ op te vatten als verzamelingen en hier een bijectie tussen te maken. Dit kunnen we op een structurele doch omslachtige manier als volgt doen. De natuurlijke getallen 1 en n vatten we op als de verzamelingen $\{1\}$ en $\{1, \ldots, n\}$ die uit 1 respectievelijk n elementen bestaan. De operaties $+$ en $\times$ vervangen we door een formele disjuncte vereniging en een cartesisch product: Voor verzamelingen A en B zij

$$A + B = \{(\text{links}, a) \mid a \in A\} \cup \{(\text{rechts}, b) \mid b \in B\} \quad \text{en} \quad A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Nu geldt dat $\{1, \ldots, n\} + \{1, \ldots, m\} \cong \{1, \ldots, n+m\}$: we sturen (links, a) naar a en (rechts, b) naar $n+b$. Ook hebben we $\#(A+B) = \#A + \#B$ en $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$. Op een zelfde manier definieren we voor een verzameling A en natuurlijk getal k de verzamelingen

$$A! = \{\text{bijecties } A \to A\} = \{\text{permutaties van } A\} \quad \text{en} \quad \binom{A}{k} = \{B \mid B \subseteq A,\, \#B = k\}.$$

Een opgave is te bewijzen dat daadwerkelijk $\#(A!) = (\#A)!$ en $\#\binom{A}{k} = \binom{\#A}{k}$. Voor $n = 2$ krijgen we dat $(n+1) \cdot n!$ overeen komt met

$$\{(3, \text{id}), (3, (1\ 2)), (2, \text{id}), (2, (1\ 2)), (1, \text{id}), (1, (1\ 2))\} \tag{1}$$

en $(n+1)!$ met

$$\{\text{id}, (1\ 2), (3\ 2)(1), (3\ 2\ 1), (3\ 1)(2), (3\ 1\ 2)\}. \tag{2}$$

Een bijectie tussen de twee word verkregen door (a, s) met $a \in \{1, \ldots, n+1\}$ en s en permutatie van $\{1, \ldots, n\}$ te sturen naar de permutatie $((n+1)\ a) \cdot s$ van $\{1, \ldots, n+1\}$, waar we $s(n+1) = n+1$ nemen. Voor $n = 2$ staan (1) en (2) zo geordend dat het eerste element naar het eerste element gestuurd word, etc..

Opgaven

Opgave 1 *Hoeveel verschillende woorden kun je maken met alle letters van 'Julius'? En hoeveel met de letters van 'et tu Brute'?*

Opgave 2 *Beschouw een bungeejumpteam met 30 springers.*

(a) Op hoeveel manieren kan het team een bestuur samenstellen bestaande uit een praeses, een quaestor en een abactis?

(b) Op hoeveel manieren kan het team een hoogtevreescommissie bestaande uit drie (gelijkwaardige) leden samenstellen?

(c) Op hoeveel manieren kunnen de 30 springers verdeeld worden over een propellor- en een zweefvliegtuig tijdens het jaarlijkse Haarlemmermeer deltavliegevenement, op zo'n manier dat er geen vliegtuig zonder springers vertrekt?

Opgave 3 *Geef voor de volgende identiteiten een combinatorisch bewijs:*

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$;

(c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Opgave 4 *Hoeveel deelverzamelingen van* $\{1, \ldots, n\}$ *zijn er met een even aantal elemenenten?*

Opgave 5 *(a) Op hoeveel manieren kun je 2020 schrijven als* $x_1 + \ldots + x_{42}$*, waarbij* x_i *voor elke* $i = 1, \ldots, 42$ *een niet-negatief geheel getal is?*

(b) Dezelfde vraag, maar dan met x_i *positieve gehele getallen.*

(c) Dezelfde vraag, maar dan met x_i *niet-negatieve oneven gehele getallen.*

(d) Hoeveel 42-tallen $(x_1, \ldots, x_{42})$ *van niet-negatieve gehele getallen zijn er die voldoen aan* $x_1 + \ldots + x_{42} \leqslant 2020$*?*

Opgave 6 *Zijn* m *en* n *twee natuurlijke getallen zodanig dat* $m \geqslant n$.

(a) Hoeveel functies $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ *bestaan er?*

(b) Hoeveel van deze functies zijn injectief?

(c) Hoeveel van deze functies zijn (strikt) stijgend?

(d) Hoeveel functies $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ *zijn niet-dalend?*

(e) Hoeveel functies $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ *zijn surjectief?*

Opgave 7 *Geef voor de volgende identiteiten een combinatorisch bewijs:*

(a) $m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$;

(b) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$;

(c) $\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$;

(d) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i = n \cdot 2^{n-1}$.

Opgave 8 *Beschouw* n *punten op een cirkel en alle* $\binom{n}{2}$ *lijnstukken ertussen. Neem aan dat geen drie lijnstukken door een punt gaan. Bereken het aantal snijpunten van de lijnstukken binnen de cirkel.*

Opgave 9 *Vind het aantal paren* (a, b) *van natuurlijke getallen zodanig dat* a *en* b *kwadraatvrij zijn,* a *en* b *geen priemfactor groter dan 42 hebben en* a *en* b *copriem zijn.*

Opgave 10 *Geef voor de volgende identiteiten een combinatorisch bewijs:*

(a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 2^i = 3^n$;

(b) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$;

(c) $\sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m}\binom{n}{i} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}$;

(d)

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n+1}{4}.$$

Opgave 11 *Een Capibara loopt over een rooster van* $(0, 0)$ *naar* $(0, 0)$*. Hij doet* $2n$ *stappen van lengte 1 in een van de vier standaardrichtingen. Op hoeveel manieren kan dit?*