

Inleiding Kansrekening & Statistiek I

Voorjaar 2007

Richard Gill

<http://www.math.leidenuniv.nl/~gill>

-> teaching -> this course...

Bonuspunt regeling

- Wie bij nagenoeg alle werkcolleges (serieus) aanwezig is krijgt een bonuspunt. Je mag afwezigheden compenseren door serieuze pogingen van oplossingen van opgaven in te leveren
- Je bent uiteraard welkom allebei te doen... (maar je kunt hoogstens 1 bonus punt verdienen)

Week 1

(college wo. 7 feb, werkcoll. ma. 12 feb)

- college: H 1 zelf lezen, H 2 in klas (zie slides)
- werkcollege: quick exercises uit H 2 en H 3
- opgaven 2.1, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, *2.14*, 2.15, *2.18*
- huiswerk: H 3 lezen, opgaven 3.2, 3.4, 3.7, 3.11, 3.15, 3.18

H1 Voorbeelden

- biometrisch paspoort – iris herkenning
- voetbal op TV $\Rightarrow$ hartaanvallen
- drie-deuren probleem
- “Challenger” ramp
- statistiek en geheime diensten in oorlogstijd
- Michelson’s (1879) bepaling van “c”

H2 Kansrekening : bouwen van kansmodellen

lokale karakteristieken $\Rightarrow$ globale eigenschappen

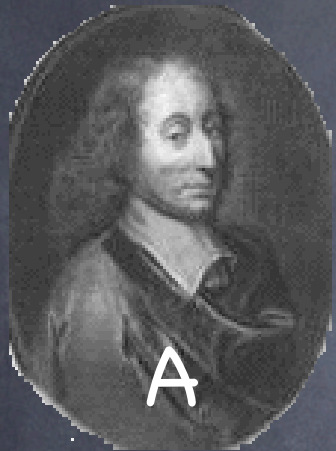
Voorbeeld :

A en B spelen tennis en zijn even sterk

De eerste om 6 punten te halen ...

Ze moeten echter het spel staken
als A 5 punten heeft, B 2

Hoe moeten ze inzet verdelen?



Statistiek : het inverse probleem

waarnemen van uitkomsten $\Rightarrow$ model keuze, validatie...

Voorbeeld :

We nemen 20 tennis matches tussen

A en B waar, sommige afgebroken...



Wat is "kans" ?



Er bestaan vele "definities", bijv:

- Subjectieve mate van geloof, te meten aan wel/niet aangaan van gokken ("subjectivistisch" / "Bayesiaans")
Savage, de Finetti, ...
- Relatieve frequentie in lange reeks van herhalingen ("objectivistisch" / "frequentistisch")
Richard von Mises *
- Relatieve aandeel van de (even waarschijnlijke) beginsituaties die leiden tot het resultaat
Laplace; iedereen tot 1900

* en later Kolmogorov, Martin-Löf, ...

Mijn opvatting :

- Accepteren van bepaalde kansen betekent accepteren van bepaalde formele analogie
- “Kans” is dus een wiskundig begrip; het betekent dat we een bepaald wiskundig model accepteren
- Het kan **mij** dus niks schelen wat **jouw** interpretatie van “kans” is, aangezien we dezelfde kansen toekennen in dezelfde situatie !
- Zelf neig **ik** naar een neo-Laplaciaans subjectief-frequentistisch standpunt ...

De analogie : de eerlijke kansspel

- Ballen uit vazen
- Zuivere muntenworp
- Perfecte dobbelsteen
- Perfecte loterij, rad van Fortuna, ...
- Perfect geschudde pak kaarten

Ik weet heus wel dat toeval "feitelijk niet echt" bestaat

– behalve in de quantum wereld

-- onze wereld is een quantum wereld

Voorlopige definitie "Kansruimte"

Verzameling Ω van "uitkomsten" ω

Afbeelding $P: 2^\Omega \rightarrow [0,1]$ zdd

$$* P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{als } A \cap B = \emptyset$$

$$* P(\Omega)=1$$

$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ heet een "gebeurtenis"

$P(A)$ is de "kans op A"

Definitieve definitie "Kansruimte"

(Kolmogorov, 1933)

Verzameling Ω van "uitkomsten"

Verzameling $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ van "gebeurtenissen"

* $\mathcal{A} \ni \Omega$; gesloten onder "complement", "aftelbare $\cup$ "

Afbeelding $P : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ zdd

* $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ als $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

* $P(\Omega) = 1$

P heet een "kansmaat", $\mathcal{A}$ een " σ -algebra"

- * We hebben aftelbare $\cup$ + nodig wegens Ω met (aftelbaar) ∞ veel uitkomsten ω bijv. $\Omega = \mathbb{N}$
- * We komen dan in de problemen met $\mathcal{A} = 2^\Omega$ wegens Ω met overaftelbaar ∞ veel uitkomsten (en keuze axioma) bijv. $\Omega = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$
- * Daarom laten we toe dat $\mathcal{A} \subsetneq 2^\Omega$
- * Voordeel: naadloze aansluiting maat-theorie
- * Maar er zijn ook andere oplossingen denkbaar

Week 2

(college wo. 14 feb , werkcoll. ma. 19 feb)

- college: H 3 in klas (zie slides, ook begin H4)
- huiswerk: quick exercises H3
- huiswerk: opgaven 3.2, 3.4, 3.7, 3.11, 3.15, *3.18*
- huiswerk: lees H4, H5
- werkcollege: quick exercises uit H4
- werkcollege: opgaven 4.2, 4.4, 4.5, *4.14*

H3 : definities voorwaardelijke kans; onafhankelijkheid

- $P(A \mid B) := P(A \cap B) / P(B)$ mits teller $\neq 0$
- A en B heten stoch. onaf. $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$
- St.1 $P(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) =$
 $P(A_1 \mid A_2 \& \dots \& A_n) \cdot P(A_2 \mid A_3 \& \dots \& A_n) \cdot \dots \cdot P(A_n)$
- St.2 $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$
 A_i partitie van Ω
- St.3 $P(A_j|B) = P(B|A_j)P(A_j) / (P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n))$

Ketting regel; wet van totale waarschijnlijkheid; wet van Bayes

Definitie: onafhankelijkheid van meerdere gebeurtenissen

• $A_1 \dots A_n$ heten onafhankelijk

$$\Leftrightarrow P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})$$

$$\forall k \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

• Gevolg : $A_1 \dots A_n$ zijn onafhankelijk

$$\Leftrightarrow A_{i_1}^{\delta_1} \dots A_{i_k}^{\delta_k} \text{ zijn onaf}$$

$$\forall k \quad \forall i_1 \dots i_k \text{ (verschillend)}$$

$$\forall \delta_1 \dots \delta_k = \text{"complement"} \text{ of } \text{"_"} "$$

H4: random variabelen

- $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heet een **random variabele**
of: stochastische variabele

- $(P_X(B) := P(X \in B) := P(\{\omega : X(\omega) \in B\}) : B \subseteq \mathbb{R})$

heet **de (kans)verdeling** van de r.v. X

- $B \subseteq \mathbb{R}$ moet wel netjes genoeg zijn: "(Borel) meetbaar"

- een random variabele (gewone taal) “is dus” een gewone (deterministische) functie (wiskundige taal)
- de kansverdeling van een random variabele is de gezamenlijke informatie van alle (interessante) kansen betreffende die variabele
- verschillende r.v.'s, in dezelfde of verschillende kansmodellen, kunnen dezelfde kansverdeling hebben
- een verdeling IS zelfs een kansmodel: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{B: B \text{ is een (nette) deelverzameling van } \mathbb{R}\}$,
 $P_X(B) = P(X \in B)$
 = (Borel) meetbare

Welcome to the Zoo !

- uniform (continuous)
 - exponential, gamma, ...
 - normal aka Gauss
(de Moivre, Bernoulli, Laplace)
 - Pareto
 - Cauchy
 - symmetric (discrete uniform)
 - Bernoulli
 - binomial, neg. bin., ...
(a Bernoulli?)
 - Poisson
(not Poisson, and nothing to do with fish...)
- AND SO ON ...

encoding a probability distribution

- the (cumulative) **distribution function**
- the **(probability) density** (what physicists call the distribution, “distributie”) continuous variables only
- the (probability) mass function
- the characteristic function
- other transforms...

Week 3

(college wo. 21 feb, werkcoll. ma. 26 feb)

- H4, H5, H6
- huiswerk: lezen, doe "quick exercises"
- 5.1, 5.3, 5.11, 5.13, *5.9*+korte heldere verklaring voor opvallend antwoord
- 6.1, 6.3, 6.4, 6.8

Continuous and discrete r.v.'s

- A distribution function (d.f.) F is:
non-decreasing, right-cts with left hand limits,
equal in the limit to 0 at $-\infty$ and +1 at $+\infty$
- Continuous r.v.'s: the density f is the derivative of the
distribution function F
- The density f is nonnegative and integrates to +1
- Discrete r.v.'s: the mass function p is the
difference-function (jumps) of the d.f. F
- The mass function p is nonnegative and sums to +1

Week 4

(college wo. 28 feb, werkcoll. ma. 3 mrt)

- lees hoofdstuk 7
- quick exercises uit H 7
- opgaven 7.1, 7.4, 7.7, 7.11, 7.12, 7.14, 7.15
- inhalen overgebleven werk van vorige hoofdstukken
- ster opgave, die hoort een beetje bij hoofdstuk 6, volgende slide : ...

ster opgave

"verwerpingsmethode"

- Stel X heeft een kansdichtheid f die 0 is buiten het interval $[0,1]$. Stel de maximale waarde van f op het interval $[0,1]$ is M . Wat volgt is een manier om een trekking uit de verdeling van X na te bootsen:
- Trek een getal U uniform tussen 0 en 1. Trek een getal V uniform tussen 0 en M . Bekijk het punt (U,V) . Als dat ONDER de grafiek van f ligt, rapporteer " $X:=U$ ". Anders, gooi U en V weg en probeer opnieuw (herhaal totdat je succes hebt...).
- Opgave: bewijs dat, voorwaardelijk op $V < f(U)$, U verdeeld is met de kansdichtheid f .

hoofdstuk 7 in een notedop

- $E(X) := \sum x p(x)$ (X discreet verdeeld)
- $E(X) := \int x f(x) dx$ (X continu verdeeld)
- Ook voor functies van random var'n bijv "kwadraat"
 $E(g(X)) = \sum g(x) p(x)$ (discreet geval),
 $= \int g(x) f(x) dx$ (continu)
- Existentie: bereken som cq. integraal over positieve en negatieve x (cq. $g(x)$) apart. Tel bij elkaar op, mbv :
 $+\infty - \text{"eindig"} = +\infty$; $\text{"eindig"} + (-\infty) = -\infty$;
 $+\infty + (-\infty) = \text{"niet gedefinieerd"}$
- Variantie: per definitie, $\text{var}(X) = E((X - EX)^2)$
feit: $\text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$

Week 5 : H8, H9 , ...

(college wo. 7 maart, werkcoll. ma. 12 mrt)

- Meerdere random variabelen
- Gezamenlijke (simultane) verdeling
- verwachting van functies van meerdere variabelen
- covariantie en correlatie
- (gezamenlijke) verdeling van (meerdere) functies van (meerdere) variabelen

Intermezzo: the real definitions

(the truth, though not the whole truth)

• $\mathcal{A} \subseteq 2^E$ heet een σ -algebra op $E \iff$

$\mathcal{A}$ is gesloten onder complement, aftelbare vereniging,
aftelbare doorsnede; en bevat E en $\emptyset$

• de Borel σ -algebra op $\mathbb{R}$ is de kleinste σ -algebra $\mathcal{B}$ op $\mathbb{R}$
die alle subintervallen bevat

Intermezzo

(continued)

- Een kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ is een kansmaat P op een sigma-algebra $\mathcal{A}$ op een uitkomstenruimte Ω
- Een (reële) random variabele X is een Borel meetbare functie $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
dus zdd $X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$
- Elke verdelingsfunctie F definieert een unieke kansmaat P_F op $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ met $P_F((a,b]) = F(b) - F(a)$

Intermezzo

(continued)

- Voor $X \geq 0$ is de verwachtingswaarde $E(X) := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) := \sup_Y \sum y P(Y=y)$ met Y discreet, $0 \leq Y \leq X$
- Voor $X \leq 0$ is $E(X) := -E(-X)$
- iha, $E(X) := E(X^+) + E(X^-)$ met $X^+ := \max(0, X)$, $X^- := \min(0, X)$

Intermezzo

(continued)

- Overplantingsstelling :
- Stel $Y=g(X)$, X een rv , $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mbaar
Def. P_X , P_Y door $P_X(B)=P(X \in B)$, enz
- “Law of the unconscious statistician” :
$$E(Y) = \int_{\Omega} Y(\omega) dP(\omega)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} y dP_Y(y)$$

Most important properties

- $E(a)=a$
- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
- Def : X, Y onaf $\Leftrightarrow$
$$P((X,Y) \in A \times B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad \forall A, B$$
- X, Y onafhankelijk $\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$
- Def : $X_1 \dots X_n$ onaf ...

werkcollege

maandag 12 maart

- lees hoofdstuk 8, 9
- quick exercises uit H 8, H 9
- opgaven 8.5, 8.12, *8.15*
- opgaven 9.3, 9.6, 9.10, 9.12, 9.13

werkcollege

maandag 19 maart

- lees hoofdstuk 10, 11
- quick exercises uit H 10, H11
- opgaven 10.3, 10.10, 10.19, *10.20*
- opgaven 11.3, 11.5, 11.6
- Hint bij opgave 10.20: waarom mogen we zonder verlies van algemeenheid ons beperken tot het geval $a=1$???