Eindtentamen – Lineaire Algebra en Beeldverwerking

7 Juni 2013

Tijd: 3 uur.

Schrijf je naam en studentnummer op alle vellen die je inlevert.

Licht bij alle vragen je antwoorden toe en schrijf je berekeningen op. Voor antwoorden zonder of met onvolledige toelichting krijg je niet de volle punten.

Het tentamen bestaat uit 8 vragen verdeeld over 3 pagina's.

Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1 (10 punten)

De lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Geef een meetkundige interpretatie van wat T doet met $\mathbb{R}^3$ in termen van schaling, spiegeling, rotatie, etc.

(b) Geef een eigenwaarde en een eigenvector voor A.

(c) Bepaal de inverse van A.

(d) Omdat A inverteerbaar is, vormen de kolommen van A een basis $\mathcal{B}$ van $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Geef de coördinaten van de vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

met betrekking tot deze basis $\mathcal{B}$, d.w.z. bereken $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$.

Opgave 2 (15 punten)

Gegeven is de volgende verzameling vectoren:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

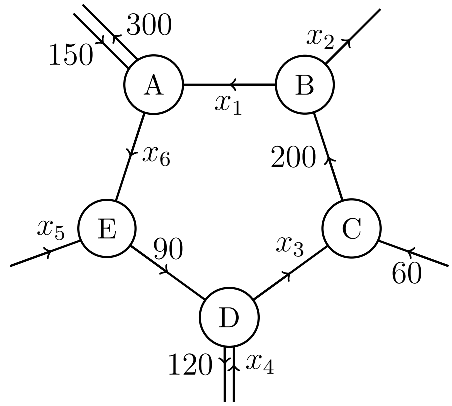
(a) Is S een lineair onafhankelijke verzameling vectoren in $\mathbb{R}^4$?

(b) Geef een basis voor $\operatorname{Span} S$.

(c) Gebruik het Gram-Schmidt proces om een orthogonale basis voor $\operatorname{Span} S$ te vinden.

Opgave 3 (10 punten)

Hieronder staat een stromingsdiagram voor het verkeer op een bepaald knooppunt. De getallen staan voor het aantal auto's dat per dag over dat stuk weg rijdt.



(a) Maak een stelsel lineaire vergelijkingen voor de verkeersstromen $x_1, \ldots, x_6$. Ga er vanuit dat de instroom op ieder punt gelijk is aan de uitstroom en ook dat de instroom in het systeem als geheel gelijk is aan de uitstroom.

(b) Wat is de algemene oplossing voor het stelsel uit (a)?

(c) Stel dat er op een bepaalde dag 180 auto's geteld zijn tussen B en A. Hoe groot waren op die dag dan de verkeersstromen $x_1, x_2, \ldots, x_6$?

Opgave 4 (15 punten)

Gebruik homogene coördinaten om de 3×3 matrices te geven die horen bij de onderstaande 2D transformaties.

(a) Verschuiving naar het punt $(-1, 3)$.

(b) Uitrekking van beide coördinaten met een factor 4.

(c) Eerst verschuiving naar het punt $(-1, 3)$ en daarna uitrekking van beide coördinaten met een factor 4.

(d) Spiegeling in het punt $(2, 1)$.

Opgave 5 (10 punten)

Bereken de determinant van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 7 & 2 & 14 \\ 11 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 14 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Opgave 6 (20 punten)

(a) Vind de eigenwaarden van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Geef voor iedere eigenwaarde uit (a) een basis voor de bijbehorende eigenruimte.

(c) Is A diagonaliseerbaar? Zo ja, geef dan een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $A = PDP^{-1}$. (Je hoeft P^{-1} niet uit te rekenen.)

Opgave 7 (10 punten)

Beschouw de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 1 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Geef een basis voor de kolomruimte Col A.

(b) Geef een basis voor de nulruimte Nul A.

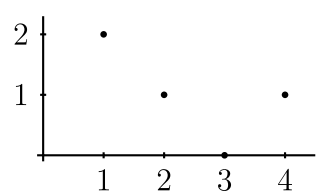
(c) Wat is de dimensie van Col A en wat is de dimensie van Nul A?

Opgave 8 (10 punten)

De locale supermarkt van een klein plaatsje in Nederland had veel last van winkeldiefstal. Vier maanden geleden hebben ze een extra beveiliger aangenomen. In de maanden daarna zijn er nog 2, 1, 0 en 1 winkeldieven gepakt. Dat geeft de volgende datapunten:

$$(1, 2),\ (2, 1),\ (3, 0),\ (4, 1),$$

zie ook de onderstaande grafiek.



Gebruik de kleinste kwadratenmethode om een vergelijking voor de lijn te vinden die het beste bij deze punten past.