

Tentamen Numerieke Wiskunde 1
woensdag 31 mei 2000, 14.00 - 17.00 uur

- (i) Gebruikte stellingen dienen duidelijk geformuleerd te worden. Laat bij toepassing van deze stellingen zien dat aan alle voorwaarden voldaan is. Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.
 - (ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.
 - (iii) Opgave 4 is alleen voor studenten *zonder* hoofdvak wiskunde; opgave 5 is alleen voor studenten *met* hoofdvak wiskunde. Iedereen maakt opgaven 1, 2 en 3.
-

1. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} U'(t) = (t^2 - 9)U(t) + 1, & t > 1, \\ U(1) = 2. \end{cases}$$

De oplossing $U(t)$ van bovenstaand beginwaardeprobleem wordt op tijdstip $t = 3$ benaderd door N stappen van een Runge-Kutta methode uit te voeren met stapgrootte $h = \frac{2}{N}$, $N \in \mathbb{N}$. Deze benadering wordt aangeduid als $T(h)$. De Runge-Kutta methode wordt gedefinieerd door de matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal $T(2)$.

Voor verschillende stapgrootten h is $T(h)$ hieronder getabelleerd.

N	h	$T(h)$
2	1	1.072727
4	$\frac{1}{2}$	0.668919
8	$\frac{1}{4}$	0.562597

(b) Laat met behulp van de gegevens in de tabel zien dat de orde van de gebruikte Runge-Kutta methode waarschijnlijk 2 is.

Nadere analyse van de methode leert dat $T(h) = U(3) + \gamma^{(1)}h^2 + \gamma^{(2)}h^3 + \mathcal{O}(h^4)$.

(c) Pas extrapolatie naar $h = 0$ toe op de gegevens in bovenstaande tabel om een betere benadering van $U(3)$ te vinden.

2. In een natuurkundig experiment is één (dimensieloze) grootheid $p \approx 0.01$ gemeten. Van de gemeten waarde \tilde{p} is alleen bekend dat zij een relatieve fout bezit die in absolute waarde ten hoogste 10^{-4} is. We zijn geïnteresseerd in de waarde $y = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1+p} = \frac{2}{p-p^2}$.

- (a) Bepaal het conditiegetal van y m.b.t. p en leid hieruit af dat de relatieve nauwkeurigheid waarmee y te bepalen is in absolute waarde (ongeveer) ten hoogste 10^{-4} is.

Voor de berekening van een benadering \tilde{y} van y gebruiken we een representatie met grondtal $B = 10$ en aantal cijfers t . Met \oplus , \ominus en \otimes noteren we de machine-versies van de rekenkundige operaties $+$, $-$ en $/$. We beschikken over twee verschillende algoritmen A1 en A2, die gegeven zijn door

$$\begin{aligned} \text{A1} : \tilde{y} &= (1 \otimes (1 \ominus \tilde{p})) \ominus (1 \otimes (1 \oplus \tilde{p})), \\ \text{A2} : \tilde{y} &= 2 \otimes ((1 \otimes \tilde{p}) \ominus \tilde{p}). \end{aligned}$$

In het volgende mag worden aangenomen dat \tilde{p} representeerbaar is.

- (b) Laat zien dat algoritme A2 stabiel is dan algoritme A1.
- (c) Leid af hoe groot het aantal cijfers t (van de representatie) minstens moet zijn opdat voor de met A2 verkregen benadering \tilde{y} van y geldt $|\tilde{y} - y|/|y| \lesssim 5 \cdot 10^{-4}$.
3. Zij gegeven de functie $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. We hebben de beschikking over onderstaande tabel van functiewaarden $f(t_i)$ ($i = 0, 1, 2, 3$).

i	t_i	$f(t_i)$
0	0	0
1	1	1
2	2	3
3	4	10

Verder is gegeven dat f vier maal continu differentieerbaar is op $[0, 4]$ en dat $|f^{(k)}(t)| \leq \frac{8}{k^2}$ voor alle $t \in [0, 4]$ en $k = 1, 2, 3, 4$.

Zij $P = P_{0,1,2,3}$ het interpolerende polynoom van orde 4.

- (a) Bereken $P(3)$ met de methode van Neville en toon aan dat $|P(3) - f(3)| \leq \frac{1}{8}$.

We zijn geïnteresseerd in de oplossing van de vergelijking

$$(1) \quad x + e^x = f(3).$$

Daar we niet over $f(3)$ beschikken, vervangen we (1) door de vergelijking

$$(2) \quad y + e^y = P(3).$$

Er geldt dat $y \simeq 1.503$.

- (b) Leid, zonder vergelijkingen op te lossen, een geschatte bovengrens voor $|x - y|$ af.

4. Deze opgave is uitsluitend voor studenten ZONDER hoofdvak wiskunde.

Voor $x = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2$ definiëren we

$$F(x) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 + 20\xi_2^2 - 2 \\ 2\xi_1 - \xi_2 - 2 \\ \xi_1 + \xi_1\xi_2 + \xi_2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Gezocht wordt een kleinste kwadratenoplossing $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*)^T \in \mathbb{R}^2$ van het overbepaalde stelsel $F(x) = 0$. Zij $x_1 \in \mathbb{R}^2$ een benadering van x^* verkregen door één stap van de methode van Gauss-Newton met startwaarde $x_0 = (1, 0)^T$ uit te voeren.

- Bepaal x_1 en toon aan dat $|F(x_1)|_2 > |F(x_0)|_2$.
- Voer uitgaande van $x_0 = (1, 0)^T$ één stap van de *gedempte* versie van de methode van Gauss-Newton uit. De aldus verkregen benadering \tilde{x}_1 van x^* moet voldoen aan $|F(\tilde{x}_1)|_2 < |F(x_0)|_2$.

5. Deze opgave is uitsluitend voor studenten MET hoofdvak wiskunde.

Bewijs de volgende stelling:

Zij $|\cdot|$ een willekeurige norm in \mathbb{R}^n , $D \subset \mathbb{R}^n$ gesloten en $x_0 \in D$. Zij $G: D \rightarrow D$ contraherend (met factor θ), en laat de rij $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ gedefinieerd zijn door $x_{k+1} = G x_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Dan geldt:

- Er is precies één $x^* \in D$ met $Gx^* = x^*$.
- $|x_k - x^*| \leq \theta^k \cdot |x_0 - x^*|$ voor $k \geq 0$ (a-priori schatting).
- $|x_k - x^*| \leq \frac{\theta}{1-\theta} |x_k - x_{k-1}|$ voor $k \geq 1$ (a-posteriori schatting).