

**Tentamen Numerieke Wiskunde 1**  
**vrijdag 11 augustus 2000, 14.00 - 17.00 uur**

- (i) Gebruikte stellingen dienen duidelijk geformuleerd te worden. Laat bij toepassing van deze stellingen zien dat aan alle voorwaarden voldaan is. Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.
- (ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.
- (iii) Opgave 5 is alleen voor studenten *zonder* hoofdvak wiskunde; opgave 2 is alleen voor studenten *met* hoofdvak wiskunde. Iedereen maakt opgaven 1, 3 en 4.
- 

1. In een biologisch experiment wordt een grootte  $p \approx 0.01$  gemeten. Van de gemeten waarde  $\tilde{p}$  is bekend dat zij een relatieve fout bezit, die in absolute waarde ten hoogste  $10^{-2}$  is. We zijn geïnteresseerd in de waarde  $y = 1 - \sqrt{1 - p}$ .

- (a) Bepaal het conditiegetal van  $y$  met betrekking tot  $p$ , en leid hieruit af dat de relatieve nauwkeurigheid waarmee  $y$  te bepalen is in absolute waarde (ongeveer) ten hoogste  $10^{-2}$  is.

Voor de berekening van een benadering  $\tilde{y}$  van  $y$  gebruiken we een representatie met grondtal  $B = 10$  en aantal cijfers  $t$ . Met  $\ominus$  en SQRT noteren we de machine-versies van de rekenkundige operaties ‘-’ en ‘ $\sqrt{\phantom{x}}$ ’. Er geldt dus voor alle representeerbare  $a$  en  $b$ :  $a \ominus b = \text{fl}_t(a - b)$  en  $\text{SQRT}(a) = \text{fl}_t(\sqrt{a})$ . We zullen de volgende algoritme gebruiken:

$$A : \tilde{y} = 1 \ominus (\text{SQRT}(1 \ominus \tilde{p})).$$

- (b) Bepaal de conditiegetallen van algoritme A.

In het volgende mag worden aangenomen dat  $\tilde{p}$  representeerbaar is.

- (c) Leid af hoe groot het aantal cijfers  $t$  van de representatie minstens moet zijn opdat voor de met algoritme A verkregen benadering  $\tilde{y}$  geldt:  $|\tilde{y} - y|/|y| \lesssim 2 \cdot 10^{-2}$ .

**2. Deze opgave is uitsluitend voor studenten MET hoofdvak wiskunde.**

Teneinde een overbepaald stelsel niet-lineaire vergelijkingen  $F(x) = 0$  op te lossen in de zin der kleinste kwadraten, kunnen we gebruik maken van de *gedempte* versie van de methode van Gauss-Newton.

Zij  $m \geq n$ . Veronderstel :

- (a)  $D \subset \mathbb{R}^n$  is open,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  heeft continue tweede orde partiële afgeleiden  $\frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_k} F_i(x)$  op  $D$ ;
- (b)  $x_0 \in D$  en de  $m \times n$  matrix  $F'(x_0) = \left( \frac{\partial}{\partial \xi_j} F_i(x_0) \right)$  is regulier;  $s_0 \neq 0$  is de oplossing in de zin der kleinste kwadraten van het stelsel  $F(x_0) + F'(x_0)s = 0$ .

Definieer voor  $\lambda \in \mathbb{R}$  met  $x_0 + \lambda s_0 \in D$  de functie  $g(\lambda) = \left( |F(x_0 + \lambda s_0)|_2 \right)^2$ .

Bewijs dat er een  $\bar{\lambda} > 0$  bestaat zó dat de functie  $g$  strikt dalend is op het interval  $[0, \bar{\lambda}]$ .

3. Op het interval  $[0, 1]$  zoeken we nulpunten van de functie

$$f(x) = e^x + x^3 - 20x + 1.$$

(a) Laat zien dat  $f(x) = 0$  precies één oplossing heeft op het interval  $[0, 1]$ .

We duiden deze oplossing aan met  $x^*$ . We kunnen  $x^*$  benaderen met behulp van de methode van Newton.

(b) Voer één stap van de methode van Newton uit met startwaarde  $x_0 = 1$ .

Is het zinvol demping toe te passen? Zo ja, voer in dat geval één stap van de *gedempte* methode van Newton uit met startwaarde  $x_0 = 1$ .

Eenvoudig is in te zien dat  $x^*$  een dekpunt is van de vergelijking

$$x = g(x), \text{ met } g(x) = \frac{1}{20}(1 + e^x + x^3).$$

Beschouw het iteratieve proces, uitgaande van een startwaarde  $x_0 \in [0, 1]$ ,

$$(1) \quad x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(c) Bewijs dat

$$|g(\tilde{x}) - g(x)| \leq 0.3 \cdot |\tilde{x} - x| \quad \text{voor alle } \tilde{x}, x \in [0, 1].$$

(d) Bewijs dat  $x^*$  het enige dekpunt van  $g$  in het interval  $[0, 1]$  is, en dat de rij  $x_0, x_1, x_2, \dots$  voor iedere  $x_0 \in [0, 1]$  convergeert naar  $x^*$ .

(e) Zij  $x_0 \in [0, 1]$ . Bepaal op grond van de in het collegedictaat vermelde *a-priori schatting* bij contraherende afbeeldingen een zo klein mogelijke waarde  $k$  waarvoor

$$|x_k - x^*| \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

en noem deze waarde  $\hat{k}$ .

(f) Voer het iteratieve proces (1) uit met startwaarde  $x_0 = 0$  en beëindig de iteratie zodra voor een berekende  $x_k$  op grond van de in het collegedictaat vermelde *a-posteriori schatting* bij contraherende afbeeldingen geldt dat

$$|x_k - x^*| \leq 5 \cdot 10^{-3}.$$

Doe in geen geval meer dan  $\min\{\hat{k}, 10\}$  stappen van proces (1). Vermeld alle gevonden benaderingen van  $x^*$ .

4. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$(1) \quad \begin{cases} U_1'(t) = \cos(U_2(t)), & t > 0, \\ U_2'(t) = -\sin(U_1(t)), & t > 0, \\ U_1(0) = 1, & U_2(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Definieer  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  en  $u_0 \in \mathbb{R}^2$  zo dat (1) equivalent is met het stelsel

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)), & t > 0, \\ U(0) = u_0. \end{cases}$$

We benaderen  $U(\frac{1}{2})$  met behulp van de Runge-Kutta methode met Runge-Kutta matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal met de methode  $M$  en  $h = \frac{1}{2}$  een benadering van  $U(\frac{1}{2})$ .

De benadering van  $U(\frac{1}{2})$ , verkregen door herhaalde toepassing van methode  $M$  met stapgrootte  $h$ , noteren we als  $T(h)$  met  $T(h) = \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \end{pmatrix}$ . Gegeven is de volgende tabel met waarden  $T(h)$ .

| $h$            | $T(h)$  |
|----------------|---|
| $\frac{1}{4}$  | $\begin{pmatrix} 1.3521743 \\ 0.54462906 \end{pmatrix}$ |
| $\frac{1}{8}$  | $\begin{pmatrix} 1.3529658 \\ 0.54367660 \end{pmatrix}$ |
| $\frac{1}{16}$ | $\begin{pmatrix} 1.3531828 \\ 0.54342356 \end{pmatrix}$ |

(c) Schat met behulp van de waarden uit bovenstaande tabel de orde van de Runge-Kutta methode  $M$ .

Het blijkt dat  $T_2(h) = U_2(\frac{1}{2}) + \gamma^{(2)}h^2 + \gamma^{(3)}h^3 + \mathcal{O}(h^4)$ , waarbij  $\gamma^{(2)}$  en  $\gamma^{(3)}$  zekere constanten zijn.

(d) Bepaal met extrapolatie naar  $h = 0$  een zo nauwkeurig mogelijke benadering van  $U_2(\frac{1}{2})$ . Geef uw antwoorden in 8 cijfers nauwkeurig.

5. Deze opgave is uitsluitend voor studenten **ZONDER** hoofdvak wiskunde.

Op tijdstippen  $t = 0, 1, 4, 5$  zijn metingen gedaan van de grootheid  $\eta$ . De meetresultaten zijn weergegeven in onderstaande tabel.

| $i$ | $t_i$ | $\eta_i$ |
|-----|-------|----------|
| 1   | 0     | 4        |
| 2   | 1     | 3        |
| 3   | 4     | -4       |
| 4   | 5     | 5        |

Volgens een bepaald model moet de relatie  $\eta = \varphi(t)$  gelden waarbij de functie  $\varphi(t) = \xi_1 + \xi_2 \sin(\xi_3 t)$  afhangt van de onbekende parameters  $\xi_1, \xi_2$  en  $\xi_3$ . De gedane metingen leiden tot het overbepaalde stelsel vergelijkingen

$$\xi_1 + \xi_2 \sin(\xi_3 t_i) - \eta_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Uitgaande van de startvector  $x_0 = (0, 2, \frac{\pi}{2})^T$  vindt men na uitvoering van één stap van de methode van Gauss-Newton op bovenstaand stelsel een vector  $x_1$ . De vector  $s = x_1 - x_0$  voldoet aan  $Hs = z$ , waarbij  $H$  een  $3 \times 3$  matrix is.

- Bepaal  $H$  en  $z$ .
- Los het stelsel  $Hs = z$  op met 'scaled column pivoting' (ook wel 'scaled partial pivoting' genoemd).