Tentamen Numerieke Wiskunde 1
woensdag 30 mei 2001, 14.00 - 17.00 uur

(i) Gebruikte stellingen dienen duidelijk geformuleerd te worden. Laat bij toepassing van deze stellingen zien dat aan alle voorwaarden voldaan is. Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.
(ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.
(iii) Opgave 4 is alleen voor studenten *met* hoofdvak wiskunde; opgave 5 is alleen voor studenten *zonder* hoofdvak wiskunde.

---

1. Voor een gegeven waarde $r \approx 0$ ($r \neq 0$) bekijken we de berekening van de waarde

$$y = \frac{1-\cos(r)}{\sin(r)}.$$

(a) Bereken het conditiegetal van y m.b.t. r.

(b) Is de opgave y te berekenen goed geconditioneerd?

Zij $\widetilde{r}$ een benadering van r.
Ter berekening van y zijn twee algoritmen voorhanden: A1 en A2. De operaties bij deze algoritmen worden uitgevoerd in drijvende punt aritmetiek met grondtal $B = 10$ en aantal cijfers t. Met COS en SIN noteren we de machine-versies van de functies 'cos' en 'sin'. De algoritmen A1 resp. A2 luiden als volgt:

$$\begin{aligned} \text{A1}: \ & \widetilde{y}_1 = \text{SIN}(\widetilde{r}) \oslash \big(1 \oplus \text{COS}(\widetilde{r})\big), \\ \text{A2}: \ & \widetilde{y}_2 = \big(1 \ominus \text{COS}(\widetilde{r})\big) \oslash \text{SIN}(\widetilde{r}). \end{aligned}$$

(c) Aan welke algoritme om y te benaderen zou u de voorkeur geven? Motiveer uw antwoord.

Veronderstel dat $r \approx 0.009$, dat $\left|\dfrac{\widetilde{r}-r}{r}\right| \leq 2 \cdot 10^{-6}$ en dat $\widetilde{r}$ representeerbaar is.

(d) Leid voor een van beide algoritmen af hoe groot het aantal cijfers t van de representatie minstens moet zijn opdat voor de met deze algoritme verkregen benadering $\widetilde{y}$ geldt: $\left|\dfrac{\widetilde{y}-y}{y}\right| \lesssim 10^{-5}$.

2. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$(1) \qquad \begin{cases} U_1'(t) = -t\,U_1(t)U_2(t) + 2, \quad t > 2, \\[2ex] U_2'(t) = U_1(t) - U_2(t) + t - 1, \quad t > 2, \\[2ex] U_1(2) = 2, \quad U_2(2) = 1. \end{cases}$$

(a) Definieer $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u_0 \in \mathbb{R}^2$ en $t_0 \in \mathbb{R}$ zó dat (1) equivalent is met het stelsel

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)), & t > t_0, \\ U(t_0) = u_0. \end{cases}$$

We benaderen $U(4)$ met behulp van de Runge-Kutta methode met Runge-Kutta matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal met de methode M en $h = 2$ een benadering van $U(4)$.

De benadering van $U(4)$, verkregen door herhaalde toepassing van methode M met stapgrootte h, noteren we als $T(h)$ met $T(h) = \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \end{pmatrix}$. Gegeven is de volgende tabel met waarden $T(h)$.

h	$T(h)$
$\frac{1}{64}$	$\begin{pmatrix} 0.21061162 \\ 2.51616776 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{128}$	$\begin{pmatrix} 0.21060804 \\ 2.51618325 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{256}$	$\begin{pmatrix} 0.21060718 \\ 2.51618706 \end{pmatrix}$

(c) Schat met behulp van de waarden uit bovenstaande tabel de orde van de Runge-Kutta methode M.

Het blijkt dat $T_2(h) = U_2(4) + \gamma^{(2)}h^2 + \gamma^{(3)}h^3 + \mathcal{O}(h^4)$, waarbij $\gamma^{(2)}$ en $\gamma^{(3)}$ zekere constanten zijn.

(d) Bepaal met extrapolatie naar $h = 0$ een zo nauwkeurig mogelijke benadering van $U_2(4)$. Geef uw antwoorden in 9 cijfers nauwkeurig.

3. De functie f is gedefinieerd op het interval $[-3, 2]$. In de volgende tabel staan enkele functiewaarden vermeld.

i	t_i	$f(t_i)$
1	-3	-4
2	-2	2
3	0	-4
4	1	-4
5	2	6

Zij P het polynoom van orde 5 zó dat $P(t_i) = f(t_i)$ voor $i = 1, 2, \ldots, 5$.

(a) Bepaal $P(-1)$ met de methode van Neville.

(b) Bepaal met behulp van de interpolatieformule van Newton een representatie van het polynoom P.

Het is bekend dat voor $k = 0, 1, 2, \ldots$ geldt dat $-\dfrac{60}{k+2} \leq f^{(k)}(t) \leq \dfrac{80}{k+2}$ voor alle $t \in [-3, 2]$.

(c) Bepaal een zo nauwkeurig mogelijke insluiting van $f(-1)$.

4. Deze opgave is uitsluitend voor studenten MET hoofdvak wiskunde.

Laten m en n gehele getallen zijn met $m \geq n \geq 1$. Zij verder $y \in \mathbb{R}^m$ en A een reguliere $m \times n$ matrix. Beschouw het overbepaalde stelsel vergelijkingen

$$Ax = y, \tag{1}$$

met bijbehorende normaalvergelijkingen

$$Hx = b. \tag{2}$$

Nu geldt de volgende stelling:

Stelling
(i) De matrix H is symmetrisch.
(ii) Met de matrix H is Gauss-eliminatie uitvoerbaar zonder rijverwisselingen.
(iii) De matrix H is regulier.
(iv) Als x een kleinste kwadraten oplossing van (1) is, dan voldoet x aan (2).
(v) Probleem (1) heeft precies één kleinste kwadraten oplossing x. □

Geef een volledig bewijs van deze stelling. U mag hierbij gebruik maken van het volgende lemma:

Lemma
Zij B een gegeven $s \times s$ matrix, v een gegeven vector in $\mathbb{R}^s$, u een onbekende vector in $\mathbb{R}^s$. Met betrekking tot het stelsel $Bu = v$ is Gauss-eliminatie uitvoerbaar zonder rijverwisselingen dan en slechts dan indien alle principale deelmatrices van B regulier zijn. □

5. Deze opgave is uitsluitend voor studenten ZONDER hoofdvak wiskunde.

Zij $D = \{x \mid x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\mathrm{T}}, |\xi_1| \leq \frac{1}{2}, |\xi_2| \leq \frac{1}{2}, |\xi_3| \leq \frac{1}{2}\}$ en zij $G(x) = (G_1(x), G_2(x), G_3(x))^{\mathrm{T}}$ met

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \tfrac{1}{2}{\xi_1}^3 - \tfrac{1}{3}{\xi_2}^3 + \tfrac{1}{3}, \\ G_2(x) &= -\tfrac{1}{3}{\xi_1}^3 + \tfrac{1}{2}{\xi_2}^3 - \tfrac{1}{3}{\xi_3}^3 + \tfrac{1}{3}, \\ G_3(x) &= -\tfrac{1}{3}{\xi_2}^3 + \tfrac{1}{2}{\xi_3}^3 + \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Hierbij is $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\mathrm{T}}$.

(a) Toon aan dat $\|G\|_\infty = \frac{7}{8}$.

(b) Bewijs dat G precies één dekpunt $x^\star$ in D heeft.

Ter benadering van $x^\star$ uit onderdeel (b) passen we de methode van Newton toe.

(c) Definieer $F(x) = x - G(x)$. Kies $x_0 = (\frac{1}{2}, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ en voer één stap van de methode van Newton uit ter benadering van het nulpunt van F in D.

(d) Formuleer de gemodificeerde en de gediscretiseerde methode van Newton en bespreek kort hun voor- en nadelen ten opzichte van de methode van Newton.