Tentamen Numerieke Wiskunde 1
vrijdag 10 augustus 2001, 14.00 - 17.00 uur

(i) Gebruikte stellingen dienen duidelijk geformuleerd te worden. Laat bij toepassing van deze stellingen zien dat aan alle voorwaarden voldaan is. Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.
(ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.
(iii) Opgave 1 is alleen voor studenten *met* hoofdvak wiskunde; opgave 5 is alleen voor studenten *zonder* hoofdvak wiskunde.

---

1. Deze opgave is uitsluitend voor studenten MET hoofdvak wiskunde.

Laten m en n gehele getallen zijn met $m \geq n \geq 1$. Zij verder $y \in \mathbb{R}^m$ en A een reguliere $m \times n$ matrix. Beschouw het overbepaalde stelsel vergelijkingen

$$Ax = y, \tag{1}$$

met bijbehorende normaalvergelijkingen

$$Hx = b. \tag{2}$$

Nu geldt de volgende stelling:

Stelling
(i) De matrix H is symmetrisch.
(ii) Met de matrix H is Gauss-eliminatie uitvoerbaar zonder rijverwisselingen.
(iii) De matrix H is regulier.
(iv) Als x een kleinste kwadraten oplossing van (1) is, dan voldoet x aan (2).
(v) Probleem (1) heeft precies één kleinste kwadraten oplossing x. $\square$

Geef een volledig bewijs van deze stelling. U mag hierbij gebruik maken van het volgende lemma:

Lemma
Zij B een gegeven $s \times s$ matrix, v een gegeven vector in $\mathbb{R}^s$, u een onbekende vector in $\mathbb{R}^s$. Met betrekking tot het stelsel $Bu = v$ is Gauss-eliminatie uitvoerbaar zonder rijverwisselingen dan en slechts dan indien alle principale deelmatrices van B regulier zijn. $\square$

2. We bekijken de vergelijking

$$0.76\,\sin(x) - 0.13\,e^{\lambda x} + 4.2 = 0.$$

Voor $\lambda \in [2,3]$ heeft deze vergelijking precies één oplossing. We duiden deze oplossing aan met $f(\lambda)$. We zijn geïnteresseerd in $f(\sqrt{5})$. Het is bekend dat $f(2.2) = 1.655$ (afgerond op 4 cijfers).

(a) Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting van $f(\sqrt{5})$ in 4 cijfers nauwkeurig.

(b) Doe één stap van de methode van Newton met startwaarde $x_0 = 1.6$ om een betere benadering van de oplossing van de vergelijking

$$0.76\,\sin(x) - 0.13\,e^{\sqrt{5}\,x} + 4.2 = 0.$$

te vinden (geef uw antwoord in 6 cijfers nauwkeurig).

3. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$(1) \qquad \begin{cases} U_1'(t) = t\,U_2(t), \quad t > \frac{1}{2}, \\ U_2'(t) = U_1(t)\,U_2(t) + t, \quad t > \frac{1}{2}, \\ U_1(\frac{1}{2}) = 1, \quad U_2(\frac{1}{2}) = -1. \end{cases}$$

(a) Definieer $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u_0 \in \mathbb{R}^2$ en $t_0 \in \mathbb{R}$ zo dat (1) equivalent is met het stelsel

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)), \quad t > t_0, \\ U(t_0) = u_0. \end{cases}$$

We benaderen $U(1)$ met behulp van de Runge-Kutta methode met Runge-Kutta matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal met de methode M en $h = \frac{1}{2}$ een benadering van $U(1)$. We vinden met deze (impliciete) RK-methode twee mogelijke antwoorden. Welk antwoord verdient de voorkeur? Geef de exacte waarde van dit antwoord voor de gekozen benadering van $U(1)$.

De benadering van $U(1)$, verkregen door herhaalde toepassing van methode M met stapgrootte h, noteren we als $T(h)$ met $T(h) = \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \end{pmatrix}$. Gegeven is de volgende tabel met waarden $T(h)$.

h	$T(h)$
$\frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} \cdots \\ -0.732051 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{8}$	$\begin{pmatrix} \cdots \\ -0.899897 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{16}$	$\begin{pmatrix} \cdots \\ -0.984928 \end{pmatrix}$

(c) Schat met behulp van de waarden uit bovenstaande tabel de orde van de Runge-Kutta methode M.

Het blijkt dat $T_2(h) = U_2(1) + \gamma^{(1)}h + \gamma^{(2)}h^2 + \mathcal{O}(h^3)$, waarbij $\gamma^{(1)}$ en $\gamma^{(2)}$ zekere constanten zijn.

(d) Bepaal met extrapolatie naar $h = 0$ een zo nauwkeurig mogelijke benadering van $U_2(1)$. Geef uw antwoorden in 6 cijfers nauwkeurig.

4. Men wil $I = \int_0^1 \log(1+2x)\,\mathrm{d}x$ bepalen. Daartoe heeft men de beschikking over onderstaande tabel van afgeronde functiewaarden van $\log(1+2x)$.
Rond de eindantwoorden in (a), (b) en (c) af op zes cijfers na de decimale punt.

x	$\log(1+2x)$
0	0.000000
$\frac{1}{4}$	0.405465
$\frac{1}{2}$	0.693147
$\frac{3}{4}$	0.916290
1	1.098612

(a) Bepaal met behulp van de uitgebreide trapeziumregel met staplengte $\frac{1}{4}$ en de tabel een benadering $\widetilde{I}$ van I.

(b) Bepaal een zo groot mogelijke ondergrens, m, en een zo klein mogelijke bovengrens, M, van $\widetilde{I} - I$.

Uit onderdeel (b) volgt $|\widetilde{I} - I| \leq \lambda$ met $\lambda = \max\{|m|, |M|\}$.

(c) Gebruik het antwoord op onderdeel (b) om een nieuwe (betere) benadering $\widehat{I}$ van de gevraagde integraal I te verkrijgen zó dat $|\widehat{I} - I| \leq \mu$ met $\mu < \lambda$.

(d) Benader met behulp van de tabel een zo nauwkeurig mogelijke benadering van I door middel van Rombergintegratie.

5. Deze opgave is uitsluitend voor studenten ZONDER hoofdvak wiskunde.

Gegeven is de volgende tabel van paren (t_i, η_i) $(i = 0, 1, 2)$.

i	t_i	η_i
0	-1	4
1	0	1
2	1	3

Op theoretische gronden geldt het verband $\eta = \varphi(t)$ met $\varphi(t) = \alpha + \beta t + \dfrac{1}{\alpha+\beta} t^2$ voor zekere constanten α en β.

(a) Stel drie vergelijkingen, $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$ en $F_3(x) = 0$ met $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ voor de twee onbekenden $\xi_1 = \alpha$ en $\xi_2 = \beta$ op.

Zij $D = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \middle| \ \xi_1 + \xi_2 > 0, \xi_1 \in \mathbb{R}, \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}$ en definieer de afbeelding $F : D \to \mathbb{R}^3$ door $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \end{pmatrix}$.

Zij verder $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ een goede benadering van de vector $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

(b) Doe één stap van de methode van Gauss-Newton, uitgaande van $x^{(0)}$, om een betere benadering $x^{(1)}$ te verkrijgen van de oplossing in de zin der kleinste kwadraten van het overbepaalde stelsel niet-lineaire vergelijkingen $F(x) = 0$. Bepaal de componenten van $x^{(1)}$ in 6 cijfers nauwkeurig.