Tentamen Numerieke Wiskunde A
dinsdag 2 juni 1998, 14.00 - 17.00 uur

(i) Gebruikte stellingen dienen duidelijk geformuleerd te worden. Laat bij toepassing van deze stellingen zien dat aan alle voorwaarden voldaan is. Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.
(ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.
(iii) Opgave 3 is alleen voor studenten *met* hoofdvak wiskunde; opgave 4 is alleen voor studenten *zonder* hoofdvak wiskunde.

---

1. f is een oneindig vaak differentieerbare functie op het interval $[\frac{1}{2}, 2]$ en voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ geldt dat $|f^{(n)}(t)| \leq 6 \cdot (\frac{n}{3})^n$ voor alle $t \in [\frac{1}{2}, 2]$.
Verder is gegeven dat $f(\frac{1}{2}) = \alpha$, $f(1) = 1$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\alpha$ en $f(2) = 1$ waarbij α een gegeven grootheid is.
Zij P het interpolerende polynoom van orde 4 door de puntenparen $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})), (1, f(1))$, $(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2}))$ en $(2, f(2))$. We willen $f(\frac{5}{4})$ benaderen door $P(\frac{5}{4})$.

(a) Bepaal $P(\frac{5}{4})$, uitgedrukt in α.

We beschikken slechts over een benadering $\widetilde{\alpha}$ van de grootheid α. Noteer $\Delta\alpha = \widetilde{\alpha} - \alpha$.

(b) Hoe groot mag $|\Delta\alpha|$ maximaal zijn, opdat de absolute waarde van het verschil van $f(\frac{5}{4})$ en de met $\widetilde{\alpha}$ door interpolatie gevonden benadering van $f(\frac{5}{4})$ hoogstens $\frac{1}{24}$ is?

2. In een natuurkundig experiment worden twee (dimensieloze) grootheden $a \approx 50$ en $b \approx 0.05$ gemeten. Van de gemeten waarden $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ is alleen bekend dat ze relatieve fouten bezitten die in absolute waarde ten hoogste 10^{-3} zijn. We zijn geïnteresseerd in de waarde $y = (a+b)^2 - a^2 = b\,(b + 2a)$.

(a) Bepaal de conditiegetallen van y m.b.t. a en b, en leid hieruit af dat de relatieve nauwkeurigheid waarmee y te bepalen is in absolute waarde (ongeveer) ten hoogste $2 \cdot 10^{-3}$ is.

Voor de berekening van een benadering $\widetilde{y}$ van y gebruiken we een representatie met grondtal $B = 10$ en aantal cijfers t. Met $\oplus, \ominus, \otimes$ noteren we de machine-versies van de rekenkundige operaties $+, -, \times$. We beschikken over twee verschillende algoritmen A1 en A2 die gegeven zijn door

$$\begin{aligned} \text{A1} &: \ \widetilde{y} = \big((\widetilde{a} \oplus \widetilde{b}) \otimes (\widetilde{a} \oplus \widetilde{b})\big) \ominus \big(\widetilde{a} \otimes \widetilde{a}\big), \\ \text{A2} &: \ \widetilde{y} = \big((\widetilde{b} \oplus \widetilde{a}) \oplus \widetilde{a}\big) \otimes \widetilde{b}. \end{aligned}$$

In het volgende mag worden aangenomen dat $\widetilde{a}$ en $\widetilde{b}$ representeerbaar zijn.

(b) Laat zien dat algoritme A1 *niet* stabiel is, door aan te tonen dat één of meerdere conditiegetallen in absolute waarde erg groot zijn.

(c) Leid af hoe groot het aantal cijfers t (van de representatie) minstens moet zijn opdat voor de met A2 verkregen benadering $\widetilde{y}$ van y geldt $|\widetilde{y} - y|/|y| \lesssim 3 \cdot 10^{-3}$.

3. Deze opgave is uitsluitend voor studenten MET hoofdvak wiskunde.

Teneinde een overbepaald stelsel niet-lineaire vergelijkingen $F(x) = 0$ op te lossen in de zin der kleinste kwadraten, kunnen we gebruik maken van de *gedempte* versie van de methode van Gauss-Newton.

Zij $m \geq n$. Veronderstel :

(a) $D \subset \mathbb{R}^n$ is open, $F : D \to \mathbb{R}^m$ heeft continue tweede orde partiële afgeleiden $\dfrac{\partial^2}{\partial\xi_j \partial\xi_k} F_i(x)$ op D;

(b) $x_0 \in D$ en de $m \times n$ matrix $F'(x_0) = \left(\dfrac{\partial}{\partial\xi_j} F_i(x_0)\right)$ is regulier; $s_0 \neq 0$ is de oplossing in de zin der kleinste kwadraten van het stelsel $F(x_0) + F'(x_0)s = 0$.

Definieer voor $\lambda \in \mathbb{R}$ met $x_0 + \lambda s_0 \in D$ de functie $g(\lambda) = \Big(|F(x_0 + \lambda s_0)|_2\Big)^2$.

Bewijs dat er een $\overline{\lambda} > 0$ bestaat zó dat de functie g strikt dalend is op het interval $[0, \overline{\lambda}]$.

4. Deze opgave is uitsluitend voor studenten ZONDER hoofdvak wiskunde.

Bekijk het volgende stelsel vergelijkingen

$$(1) \qquad \begin{cases} -\xi_2{\xi_3}^2 + {\xi_1}^2\xi_3 + 12\xi_1 - 5 = 0 \\ \xi_1\xi_2\xi_3 + {\xi_3}^2 - 12\xi_2 + 3 = 0 \\ -\xi_1\xi_2 - {\xi_1}^3\xi_3 - 12\xi_3 + 6 = 0 \end{cases}$$

Gegeven is de afbeelding $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ met $\mathcal{D} = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\mathrm{T}} : 0 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1\}$ en

$$G(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\,(5 + \xi_2{\xi_3}^2 - {\xi_1}^2\xi_3) \\ \frac{1}{12}\,(3 + \xi_1\xi_2\xi_3 + {\xi_3}^2) \\ \frac{1}{12}\,(6 - \xi_1\xi_2 - {\xi_1}^3\xi_3) \end{pmatrix} \quad \text{voor alle } x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}.$$

(a) Laat zien dat G contraherend is op $\mathcal{D}$ m.b.t. de maximumnorm $|\cdot|_\infty$ en factor $\theta = \frac{1}{2}$.

Zij $x_0 \in \mathcal{D}$ en definieer de vectoren $x_1, x_2, x_3, \ldots$ door $x_{k+1} = Gx_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Toon aan dat (1) precies één oplossing x^* in $\mathcal{D}$ heeft, en dat $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Een benadering van x^* kunnen we ook vinden met behulp van de methode van Newton.

(c) Voer één Newtoniteratie uit op het stelsel (1). Neem $(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ als startvector.

5. Zij gegeven de differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} U'(t) = (1-2t)U(t) - \big(U(t)\big)^2 - t^2 + t - 1, \\ U(0) = 2. \end{cases}$$

De oplossing $U(h)$ van bovenstaand beginwaardeprobleem wordt benaderd door de trapeziumregel toe te passen met stapgrootte h. Deze benadering wordt aangeduid als $\widehat{v}(h)$. Het blijkt dat $\widehat{v}(h)$ voldoet aan een vergelijking van de vorm

$$\alpha(h)\big(\widehat{v}(h)\big)^2 + \beta(h)\widehat{v}(h) + \gamma(h) = 0. \tag{2}$$

Hierbij zijn $\alpha(h)$, $\beta(h)$ en $\gamma(h)$ polynomen in h.

(a) Bepaal $\alpha(h)$, $\beta(h)$ en $\gamma(h)$.

(b) Bepaal beide oplossingen van (2).

De oplossing $U(t)$ van bovenstaand beginwaardeprobleem wordt op tijdstip $t = 1$ benaderd door herhaaldelijk de trapeziumregel toe te passen met stapgrootte $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$. Deze benadering wordt aangeduid als $T(h)$.

In onderstaande tabel is een aantal benaderingen, afgerond op 5 cijfers, van $U(1)$ gegeven, bepaald met de trapeziumregel en stapgrootten h zoals aangegeven in de tabel.

N	h	$T(h)$
1	1	...
2	$\frac{1}{2}$	0.18854
4	$\frac{1}{4}$	0.21703

(c) Bepaal de ontbrekende benadering $T(1)$ m.b.v. het antwoord op vraag (b).

(d) Bepaal door middel van extrapolatie een zo goed mogelijke benadering van $U(1)$ op grond van de waarden uit bovenstaande tabel.