Tentamen Numerieke Wiskunde A
vrijdag 14 augustus 1998, 14.00 - 17.00 uur

(i) Gebruikte stellingen dienen duidelijk geformuleerd te worden. Laat bij toepassing van deze stellingen zien dat aan alle voorwaarden voldaan is. Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.
(ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.
(iii) Opgave 3 is alleen voor studenten *zonder* hoofdvak wiskunde; opgave 5 is alleen voor studenten *met* hoofdvak wiskunde.

---

1. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
U_1'(t) &= w(t)c - \left(a + 2\frac{w(t)}{v}\right)U_1(t), & U_1(0) &= 0,\\
U_2'(t) &= 2\frac{w(t)}{v}U_1(t) - \left(a + 2\frac{w(t)}{v}\right)U_2(t), & U_2(0) &= 0,\\
U_3'(t) &= 2\frac{w(t)}{v}U_2(t), & U_3(0) &= 0,
\end{aligned}
$$

waarbij c, a, v gegeven constanten zijn en w een gegeven functie is met $w(0) = 0$.

(a) Bepaal een functie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, een vector $u_0 \in \mathbb{R}^3$ en een vector $U(t) \in \mathbb{R}^3$ zó dat (1) equivalent is met

$$
\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)) \quad (t > 0),\\ U(0) = u_0. \end{cases}
$$

Bekijk de Runge-Kutta methode met matrix

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
$$

(b) Toon aan dat toepassing van deze Runge-Kutta methode op (1) met stapgrootte h de benadering $\left(\frac{h}{2}w(h)c, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$ levert van $U(h)$.

Noteer de benadering van $U_3(48)$ verkregen door herhaalde toepassing van bovenstaande Runge-Kutta methode met stapgrootte h als $T(h)$. Gegeven is de volgende tabel met waarden $T(h)$.

h	$T(h)$
$\frac{1}{2}$	0.41693379
$\frac{1}{4}$	0.41679071
$\frac{1}{8}$	0.41672420

Verder is gegeven dat $T(h) = U_3(48) + \gamma^{(2)}h^2 + \gamma^{(3)}h^3 + \mathcal{O}(h^4)$, waarbij $\gamma^{(2)}$ en $\gamma^{(3)}$ constanten zijn.

(c) Bepaal met extrapolatie naar $h = 0$ een zo nauwkeurig mogelijke benadering van $U_3(48)$. Geef uw antwoorden in 8 cijfers nauwkeurig.

2. Men wil $I = \int_0^1 \log(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ bepalen. Daartoe heeft men de beschikking over onderstaande tabel van afgeronde functiewaarden van $\log(1+x^2)$.
Rond de eindantwoorden in (a) en (c) af op vijf cijfers na de decimale punt.

x	$\log(1+x^2)$
0	0.00000
$\frac{1}{4}$	0.06062
$\frac{1}{2}$	0.22314
$\frac{3}{4}$	0.44629
1	0.69315

(a) Bepaal met behulp van de uitgebreide trapeziumregel met staplengte $\frac{1}{4}$ en de tabel een benadering $\widetilde{I}$ van I.

(b) Bereken een zo groot mogelijke ondergrens en een zo klein mogelijke bovengrens voor $\widetilde{I} - I$.

(c) Benader met behulp van de tabel een zo nauwkeurig mogelijke benadering van I door middel van Rombergintegratie.

3. Deze opgave is uitsluitend voor studenten ZONDER hoofdvak wiskunde.

Gegeven is het volgende stelsel van twee vergelijkingen in de onbekenden ξ_1 en ξ_2:

$$(1) \qquad \begin{cases} 3\xi_1 + \sin(\xi_1 + \xi_2) - 2 = 0 \\ 4{\xi_2}^2 + \exp(\xi_1 \xi_2 - 1) - 2 = 0. \end{cases}$$

Zij $D = [-1,1] \times [0,1]$.
We definiëren de afbeelding $G : D \to \mathbb{R}^2$ door:

$$G(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}[2 - \sin(\xi_1 + \xi_2)] \\ \frac{1}{2}\sqrt{2 - \exp(\xi_1\xi_2 - 1)} \end{pmatrix}$$

voor alle $x = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}} \in D$.

(a) Toon aan dat G contraherend is op D m.b.t. $|\cdot|_\infty$ met factor $\theta = \frac{2}{3}$.

(b) Toon aan dat het stelsel (1) in D precies één oplossing $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*)^{\mathrm{T}}$ heeft.

(c) Zij $x_0 = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})^{\mathrm{T}}$ en definieer $x_1 = G(x_0)$. Bepaal x_1 en toon aan dat $|x_1 - x^*|_\infty < 0.04$.

4. Voor willekeurige gegeven waarden $r \neq 1$ bekijken we de berekening van de waarde

$$y = \frac{2r}{1-r^2}.$$

(a) Bereken het conditiegetal van y m.b.t. r.

(b) Voor welke waarden van r is de opgave y te berekenen goed geconditioneerd? Voor welke waarden slecht geconditioneerd?

Ter berekening van y zijn twee algoritmen voorhanden: A1 en A2. De operaties bij deze algoritmen worden uitgevoerd in drijvende punt aritmetiek met grondtal $B = 10$ en aantal cijfers t. Zij $\widetilde{r} = \mathrm{fl}_t(r)$, dan luiden de algoritmen A1 resp. A2

$$\begin{aligned} \text{A1}\ :\ \widetilde{y}_1 &= (2 \otimes \widetilde{r}) \oslash \big(1 \ominus (\widetilde{r} \otimes \widetilde{r})\big), \\ \text{A2}\ :\ \widetilde{y}_2 &= \big(1 \oslash (1 \ominus \widetilde{r})\big) \ominus \big(1 \oslash (1 \oplus \widetilde{r})\big). \end{aligned}$$

Veronderstel in het vervolg dat $r \in (\frac{1}{2000}, \frac{1}{1000})$.

(c) Toon aan dat voor het stabiliteitsgetal σ_1 van A1 geldt:

$$\sigma_1 \approx 4.$$

(d) Toon aan dat voor het stabiliteitsgetal σ_2 van A2 geldt:

$$\sigma_2 > 500.$$

(e) Bepaal een zo klein mogelijke waarde t waarvoor te verwachten is dat de absolute waarde van de relatieve fout in $\widetilde{y}_1$ hoogstens 0.01 is.

5. Deze opgave is uitsluitend voor studenten MET hoofdvak wiskunde.

Teneinde een overbepaald stelsel niet-lineaire vergelijkingen $F(x) = 0$ op te lossen in de zin der kleinste kwadraten, kunnen we gebruik maken van de *gedempte* versie van de methode van Gauss-Newton.

Zij $m \geq n$. Veronderstel :

(a) $D \subset \mathbb{R}^n$ is open, $F : D \to \mathbb{R}^m$ heeft continue tweede orde partiële afgeleiden $\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_k} F_i(x)$ op D;

(b) $x_0 \in D$ en de $m \times n$ matrix $F'(x_0) = \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi_j} F_i(x_0) \right)$ is regulier; $s_0 \neq 0$ is de oplossing in de zin der kleinste kwadraten van het stelsel $F(x_0) + F'(x_0)s = 0$.

Definieer voor $\lambda \in \mathbb{R}$ met $x_0 + \lambda s_0 \in D$ de functie $g(\lambda) = \left(|F(x_0 + \lambda s_0)|_2 \right)^2$.

Bewijs dat er een $\overline{\lambda} > 0$ bestaat zó dat de functie g strikt dalend is op het interval $[0, \overline{\lambda}]$.