Tentamen Numerieke Wiskunde 1
woensdag 2 juni 1999, 14.00 - 17.00 uur

(i) Gebruikte stellingen dienen duidelijk geformuleerd te worden. Laat bij toepassing van deze stellingen zien dat aan alle voorwaarden voldaan is. Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.

(ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.

(iii) Opgave 1 is alleen voor studenten *zonder* hoofdvak wiskunde; opgave 2 is alleen voor studenten *met* hoofdvak wiskunde. Iedereen maakt opgaven 3, 4 en 5.

---

1. Deze opgave is uitsluitend voor studenten ZONDER hoofdvak wiskunde.

Zij $D = [0,3] \times [-3,0]$.
Voor $x = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}} \in D$ definiëren we

$$F(x) = \begin{pmatrix} 5{\xi_1}^2 - 2\xi_1\xi_2 - 3{\xi_2}^2 - 3 \\ \xi_1 - \xi_2 - {\xi_1}^2 - 2\xi_1\xi_2 - {\xi_2}^2 - 3 \end{pmatrix}.$$

$x^\star \in D$ is het enige nulpunt van F.
Ter benadering van $x^\star$ voeren we, uitgaande van $x_0 = (0,-1)^{\mathrm{T}}$ eerst één stap van de methode van Newton uit. Deze nieuwe benadering noemen we x_1. Vervolgens doen we één stap van de methode van Broyden en verkrijgen zo de benadering x_2.

(a) Bepaal x_1.

(b) Bepaal x_2.

2. Deze opgave is uitsluitend voor studenten MET hoofdvak wiskunde.

Teneinde een overbepaald stelsel niet-lineaire vergelijkingen $F(x) = 0$ op te lossen in de zin der kleinste kwadraten, kunnen we gebruik maken van de *gedempte* versie van de methode van Gauss-Newton.

Zij $m \geq n$. Veronderstel :

(i) $D \subset \mathbb{R}^n$ is open, $F : D \to \mathbb{R}^m$ heeft continue tweede orde partiële afgeleiden $\dfrac{\partial^2}{\partial\xi_j\partial\xi_k} F_i(x)$ op D;

(ii) $x_0 \in D$ en de $m \times n$ matrix $F'(x_0) = \left(\dfrac{\partial}{\partial\xi_j} F_i(x_0)\right)$ is regulier; $s_0 \neq 0$ is de oplossing in de zin der kleinste kwadraten van het stelsel $F'(x_0)s = -F(x_0)$.

Definieer voor $\lambda \in \mathbb{R}$ met $x_0 + \lambda s_0 \in D$ de functie $g(\lambda) = \left(|F(x_0 + \lambda s_0)|_2\right)^2$.

Bewijs dat er een $\overline{\lambda} > 0$ bestaat zó dat de functie g strikt dalend is op het interval $[0, \overline{\lambda}]$.

3. Zij f een tweemaal continu differentieerbare functie op $[\alpha, \beta]$.

Ter benadering van $I = \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$ gebruiken we de zogenaamde middelpuntsregel: $\widetilde{I} = 2h \cdot f(\gamma)$, waarbij $h = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ en $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.
We weten dat voor zekere constante K en zeker natuurlijk getal p het volgende geldt:

Bij alle α, β ($\alpha < \beta$) en $f \in C^2[\alpha, \beta]$ is er een $\sigma \in [\alpha, \beta]$ zó dat

$$\widetilde{I} - I = K \cdot h^p \cdot f^{(2)}(\sigma).$$

(a) Bepaal K en p.

Zij N een natuurlijk getal, $h = \dfrac{\beta - \alpha}{2N}$ en $\tau_j = \alpha + j \cdot h$ voor $j = 0, 1, 2, \ldots, 2N$. De uitgebreide middelpuntsregel $M(h)$ wordt nu gedefinieerd door

$$M(h) = 2h \cdot \sum_{j=1}^{N} f(\tau_{2j-1}).$$

(b) Leid een uitdrukking (zonder sommatie) af voor $M(h) - I$.

We willen $I = \int_0^1 \log(1 + 3t^2)\,\mathrm{d}t$ bepalen. We hebben de beschikking over onderstaande tabel van afgeronde functiewaarden van $\log(1 + 3t^2)$.

t	$\log(1 + 3t^2)$
0	0.00000
$\frac{1}{8}$	0.04581
$\frac{1}{4}$	0.17185
$\frac{3}{8}$	0.35198
$\frac{1}{2}$	0.55962
$\frac{5}{8}$	0.77559
$\frac{3}{4}$	0.98861
$\frac{7}{8}$	1.19298
1	1.38629

Rond de eindantwoorden in (c), (d) en (e) af op vijf cijfers na de decimale punt.

(c) Bepaal met behulp van bovenstaande tabel $M(\frac{1}{2})$, $M(\frac{1}{4})$ en $M(\frac{1}{8})$.

Het is bekend dat de in onderdeel (b) bedoelde uitdrukking te verscherpen is tot

$$M(h) - I = \gamma^{(1)} h^2 + \gamma^{(2)} h^4 + \gamma^{(3)} h^6 + \mathcal{O}(h^8).$$

(d) Bepaal, uitgaande van de waarden $M(\frac{1}{2})$, $M(\frac{1}{4})$ en $M(\frac{1}{8})$, met behulp van extrapolatie naar $h = 0$ een zo nauwkeurig mogelijke benadering van I.

Nadere analyse van $M(h)$ leert dat $\gamma^{(2)} = 0$.

(e) Door gebruik te maken van deze nieuwe informatie kunnen we opnieuw een zo nauwkeurig mogelijke benadering $\widetilde{I}$ van I bepalen. Bepaal $\widetilde{I}$.

4. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$(1) \qquad \begin{cases} U_1'(t) = (1 - w(t))U_1(t) + 3w(t), & U_1(1) = 1, \\ U_2'(t) = w(t)U_1(t) + (1 - w(t))U_2(t), & U_2(1) = -1, \\ U_3'(t) = w(t)U_2(t), & U_3(1) = 2, \end{cases}$$

waarbij w een gegeven reëelwaardige functie is.

(a) Bepaal een functie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, een waarde $\alpha \in \mathbb{R}$, een vector $u_0 \in \mathbb{R}^3$ en een vector $U(t) \in \mathbb{R}^3$ zó dat (1) equivalent is met

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)) \quad (t > 0), \\ U(\alpha) = u_0. \end{cases}$$

Neem nu aan dat $w(t) = t/2$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ en bekijk de Runge-Kutta methode met matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal de benadering van $U(3)$ die door toepassing van deze Runge-Kutta methode op (1) met stapgrootte $h = 2$ wordt verkregen.

5. Voor willekeurige gegeven reële waarden r ($r \neq 0$) bekijken we de berekening van de waarde

$$y = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2.$$

(a) Bereken het conditiegetal van y m.b.t. r.

(b) Voor welke waarden van r is de opgave y te berekenen goed geconditioneerd? Voor welke waarden slecht geconditioneerd?

Ter berekening van y zijn twee algoritmen voorhanden: A1 en A2. De operaties bij deze algoritmen worden uitgevoerd in drijvende punt aritmetiek met grondtal $B = 10$ en aantal cijfers t. Zij $\widetilde{r} = \mathrm{fl}_t(r)$. De algoritmen A1 resp. A2 luiden

$$\text{A1} : \ \widetilde{s} = \widetilde{r} \otimes \widetilde{r}, \quad \widetilde{y}_1 = (\widetilde{s} \oplus (1 \oslash \widetilde{s})) \ominus 2,$$

$$\text{A2} : \ \widetilde{s} = (\widetilde{r} \ominus (1 \oslash \widetilde{r})), \quad \widetilde{y}_2 = \widetilde{s} \otimes \widetilde{s}.$$

Veronderstel in het vervolg dat $r \in [1.01, 1.02]$.

(c) Toon aan dat voor het stabiliteitsgetal σ_1 van A1 geldt:

$$\sigma_1 > 612.$$

(d) Toon aan dat voor het stabiliteitsgetal σ_2 van A2 geldt:

$$\sigma_2 < 306.$$

(e) Bepaal een zo klein mogelijke waarde t waarvoor te verwachten is dat de absolute waarde van de relatieve fout in $\widetilde{y}_2$ hoogstens 0.005 is.