Tentamen Numerieke Wiskunde 1
vrijdag 13 augustus 1999, 14.00 - 17.00 uur

(i) Gebruikte stellingen dienen duidelijk geformuleerd te worden. Laat bij toepassing van deze stellingen zien dat aan alle voorwaarden voldaan is. Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.

(ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.

(iii) Opgave 3 is alleen voor studenten *zonder* hoofdvak wiskunde; opgave 4 is alleen voor studenten *met* hoofdvak wiskunde. Iedereen maakt opgaven 1, 2 en 5.

---

1. We bekijken de vergelijking $x^3 - \log(\lambda x) - 1 = 0$. Voor iedere $\lambda \geq 1$ duiden we de grootste oplossing van deze vergelijking aan met $f(\lambda)$. Met 'log' wordt de natuurlijke logaritme bedoeld.

(a) Toon aan dat $1 < f(2) < 2$.

Ter benadering van $f(2)$ passen we de bisectiemethode toe met startinterval [1,2]. Dit levert twee rijen $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ waarvoor geldt

$$a_1 = 1,\ b_1 = 2 \text{ en } a_k \leq f(2) \leq b_k \text{ voor } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

(b) Bereken a_4 en b_4.

(c) Zij $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ voor $k = 1, 2, 3, \ldots$. Bepaal een index k zó dat $|x_k - f(2)| \leq 10^{-4}$.

(d) Laat zien dat voor het conditiegetal γ van f in $\lambda = 2$ geldt : $0.20 \leq \gamma \leq 0.31$.

(e) Zij $\widetilde{\lambda} = 2.01$. Geef met behulp van opgave (d) een benadering van

$$\frac{f(\widetilde{\lambda}) - f(\lambda)}{f(\lambda)} .$$

2. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} U'(t) = \lambda\, t\, U(t) + 2, & t > 0, \\ U(0) = 2, \end{cases}$$

waarbij λ een positief getal is.
We kennen benaderingen van $U(\frac{1}{2})$ en $U(1)$, nl. resp. 4 en 15. Met behulp van deze gegevens willen we λ zo goed mogelijk benaderen.

(a) Bepaal benaderingen van $U(\frac{1}{2})$ en $U(1)$ met behulp van de achterwaartse methode van Euler met stapgrootte $h = \frac{1}{2}$. Omdat deze benaderingen afhangen van λ noteren we ze als resp. $u_1(\lambda)$ en $u_2(\lambda)$. Er geldt dus $u_1(\lambda) \simeq U(\frac{1}{2})$ en $u_2(\lambda) \simeq U(1)$.

Beschouw het overbepaalde stelsel niet-lineaire vergelijkingen $F(\lambda) = 0$ met

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} F_1(\lambda) \\ F_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(\lambda) - 4 \\ u_2(\lambda) - 15 \end{pmatrix}.$$

Een goede benadering van λ is $\lambda_0 = 3$.

(b) Doe uitgaande van λ_0 één stap van de methode van Gauss-Newton om een betere benadering van λ te vinden.

3. Deze opgave is uitsluitend voor studenten ZONDER hoofdvak wiskunde.

We willen de integraal $I = \int_0^1 e^{t^2}\,dt$ benaderen met behulp van de uitgebreide trapeziumregel. Zij N een geheel positief getal, $h = \frac{1}{N}$. Definieer $f(t) = e^{t^2}$ en $\widetilde{f}(t) = \mathrm{fl}_5(f(t))$ voor alle $t \in [0,1]$.
Zij $\widetilde{I}_N$ een benadering van I verkregen met behulp van de uitgebreide trapeziumregel met $N+1$ equidistante steunpunten. Zij verder $\widetilde{\widetilde{I}}_N$ een benadering van I verkregen met behulp van de uitgebreide trapeziumregel met $N+1$ equidistante steunpunten waarbij de functie f vervangen wordt door de functie $\widetilde{f}$.

(a) Bepaal $\widetilde{\widetilde{I}}_2$.

(b) Toon aan dat $|\widetilde{\widetilde{I}}_N - \widetilde{I}_N| \leq 5 \cdot 10^{-5}$.

(c) Hoe groot moet N minimaal zijn opdat $|\widetilde{\widetilde{I}}_N - I| \leq 10^{-4}$?

Er geldt dat $\mathrm{fl}_5(\widetilde{\widetilde{I}}_4) = 1.4907$, $\mathrm{fl}_5(\widetilde{\widetilde{I}}_8) = 1.4697$, $\mathrm{fl}_5(\widetilde{\widetilde{I}}_{16}) = 1.4644$.

(d) Bepaal met behulp van extrapolatie naar $h = 0$ een betere benadering van I.

4. Deze opgave is uitsluitend voor studenten MET hoofdvak wiskunde.

Laten m en n gehele getallen zijn met $m \geq n \geq 1$. Zij verder $y \in \mathbb{R}^m$ en A een reguliere $m \times n$ matrix. Beschouw het overbepaalde stelsel vergelijkingen

(1) $$Ax = y,$$

met bijbehorende normaalvergelijkingen

(2) $$Hx = b.$$

Nu geldt de volgende stelling:

Stelling
(i) De matrix H is symmetrisch.
(ii) Met de matrix H is Gauss-eliminatie uitvoerbaar zonder rijverwisselingen.
(iii) De matrix H is regulier.
(iv) Als x een kleinste kwadraten oplossing van (1) is, dan voldoet x aan (2).
(v) Probleem (1) heeft precies één kleinste kwadraten oplossing x. □

Geef een volledig bewijs van deze stelling. U mag hierbij gebruik maken van het volgende lemma:

Lemma
Zij B een gegeven $s \times s$ matrix, v een gegeven vector in $\mathbb{R}^s$, u een onbekende vector in $\mathbb{R}^s$. Met betrekking tot het stelsel $Bu = v$ is Gauss-eliminatie uitvoerbaar zonder rijverwisselingen dan en slechts dan indien alle principale deelmatrices van B regulier zijn. □

5. Op het interval $[1,2]$ definiëren we de functie f door

$$f(x) = x^2 - \tfrac{1}{9}e^{x^2} \quad \text{voor alle } x \in [1,2].$$

(a) Laat zien dat $f(x) = 0$ precies één oplossing heeft op het interval $[1,2]$.

We duiden deze oplossing aan met x^*. We kunnen x^* benaderen met behulp van de methode van Newton.

(b) Voer één stap van de methode van Newton uit met startwaarde $x_0 = 1.6$. Leg in het kort uit of het hier zinvol is om demping toe te passen. Voer in dat geval één stap van de *gedempte* versie van de methode van Newton uit met $x_0 = 1.6$.

Eenvoudig is in te zien dat x^* een dekpunt is van de functie g met

$$g(x) = \sqrt{\log(9x^2)} \quad \text{voor alle } x \in [1,2].$$

Hierbij wordt met 'log' de natuurlijke logaritme bedoeld.
Beschouw het iteratieve proces, uitgaande van een startwaarde $x_0 \in [1.3, 2]$,

(1) $$x_{k+1} = g(x_k)\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

(c) Bewijs dat x^* het enige dekpunt van g in het interval $[1.3, 2]$ is, en dat de rij $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ voor iedere $x_0 \in [1.3, 2]$ convergeert naar x^*.

Zij $x_0 \in [1.3, 2]$. Uitvoeren van iteratieproces (1) geeft de waarden $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

(d) Bepaal een zo klein mogelijke index N zó dat $|x_N - x^*| < 10^{-8}$.