Introduction to Algebraic Topology, najaar 2017, huiswerkset 1

De inleverdatum voor deze huiswerkset is maandag 2 oktober. Lever uw opgaven bij voorkeur op papier in in het postvakje van Stefan van der Lugt. Lukt dit niet, dan gelieve uw opgaven per email te sturen aan `algtop2017@gmail.com`. Samenwerken is toegestaan, maar overschrijven uiteraard niet. U mag gebruik maken (maar dan wel met verwijzingen) van de stof uit colleges 1–3, van het materiaal uit Fulton, Secties 11a, b, c, d, 13a en uiteraard al het materiaal uit de syllabus Topologie (inclusief de opgaven). Indien u gebruik wenst te maken van een resultaat uit de sets oefenopgaven van weken 1 en 2 dan dient u voor dat resultaat een (kort) argument te geven.

Opgave 1. Laat G de ondergroep van de groep van homeomorfismen van $Y = \mathbb{R}^2$ naar zichzelf zijn die voortgebracht wordt door de afbeeldingen $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ en $(x, y) \mapsto (-x, y + 1)$.

(i) Laat zien dat G niet abels is.

(ii) Laat zien dat de quotiëntafbeelding $p\colon Y \to K = Y/G$ een overdekkingsafbeelding is.

(iii) Laat zien dat K niet homotopie-equivalent is met het reële projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Het quotiënt K wordt wel de *fles van Klein* genoemd.

(iv) Zij $H \subset G$ de ondergroep voortgebracht door de afbeeldingen $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ en $(x, y) \mapsto (x, y + 2)$. Laat zien dat $T = Y/H$ homeomorf is met de torus $S^1 \times S^1$ en laat zien dat de inclusie $H \subset G$ op natuurlijke wijze een 2-bladige overdekkingsafbeelding $q\colon T \to K$ van K induceert.

(v) Bewijs dat de fles van Klein compact en Hausdorff is.

Opgave 2. Zij $Y = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $X = S^1 \times S^1$. Noem $p\colon Y \to X$ de continue afbeelding gegeven door $(u, v) \mapsto (\exp(2\pi i u), \exp(2\pi i v))$.

(i) Laat zien dat $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding is.

Laat $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ een viertal elementen zijn waarvoor geldt dat $ad - bc \neq 0$. Laat $q\colon X \to X$ de continue afbeelding zijn gegeven door $(z, w) \mapsto (z^a w^b, z^c w^d)$.

(ii) Beschrijf een homeomorfisme $\tilde{q}\colon Y \to Y$ met $\tilde{q}(0, 0) = (0, 0)$ zodat het diagram

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde{q}"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "q"] & X \end{tikzcd}$$

commutatief is.

(iii) Laat zien dat een dergelijke $\tilde{q}$ uniek is.

(iv) Laat zien dat $q\colon X \to X$ een overdekkingsafbeelding is met eindig veel bladen. Bereken het aantal bladen van $q\colon X \to X$.

Opgave 3. Laat $q\colon Z \to X$ en $p\colon Y \to X$ overdekkingsafbeeldingen zijn. Laat $g\colon Z \to Y$ een continue afbeelding zijn zodat $p \circ g = q$, dat wil zeggen $g\colon Z \to Y$ is een morfisme van overdekkingsafbeeldingen. Zij $x \in X$ en laat Z_x resp. Y_x de vezels zijn van x langs q resp. p.

(i) Laat zien dat de afbeelding $g|_{Z_x}: Z_x \to Y_x$ compatibel is met de natuurlijke rechtswerking van $\pi_1(X, x)$. Dat wil zeggen, laat zien dat voor alle $\alpha \in \pi_1(X, x)$ en alle $z \in Z_x$ de gelijkheid $g(z \cdot \alpha) = g(z) \cdot \alpha$ geldt.

(ii) Laat $\varphi \in \mathrm{Aut}(Y/X)$ een automorfisme zijn van de overdekkingsafbeelding $p: Y \to X$. Laat $y, y' \in Y_x$ elementen zijn met $\varphi(y) = y'$. Laat zien dat de stabilisatoren Stab_y resp. $\mathrm{Stab}_{y'}$ van y resp. y' voor de natuurlijke rechtswerking van $\pi_1(X, x)$ op Y_x gelijk zijn in $\pi_1(X, x)$.

(iii) Bekijk nog eens de 3-bladige overdekkingsruimte $p: Y \to X$ uit Exercise 11.14 uit Fulton's "Algebraic Topology: A first course". Laat zien dat $p: Y \to X$ geen G-overdekking is.

Opgave 4. Laat $q: Z \to X$ en $p: Y \to X$ overdekkingsafbeeldingen zijn. Laat opnieuw $g: Z \to Y$ een continue afbeelding zijn zodat $p \circ g = q$. Veronderstel nu dat Y samenhangend en lokaal wegsamenhangend is. In het bijzonder is Y wegsamenhangend.

(i) Laat zien dat X samenhangend en lokaal wegsamenhangend is.

(ii) Laat zien dat g een overdekkingsafbeelding is.

Opgave 5. Laat Z samenhangend zijn en lokaal wegsamenhangend. Zij $z \in Z$ en veronderstel dat $\pi_1(Z, z)$ eindig is. Bewijs dat elke continue afbeelding $q: Z \to S^1$ homotoop is met een constante afbeelding.