Introduction to Algebraic Topology, najaar 2017, huiswerkset 3

De inleverdatum voor deze huiswerkset is maandag 27 november. Lever uw opgaven bij voorkeur op papier in in het postvakje van Stefan van der Lugt. Lukt dit niet, dan gelieve uw opgaven per email te sturen aan `algtop2017@gmail.com`. Samenwerken is toegestaan, maar overschrijven uiteraard niet. U mag gebruik maken (maar dan wel met verwijzingen) van de stof uit colleges 1–9, van het materiaal uit Fulton: Hoofdstukken 11–14, en Lee: pp. 339–347, en al het materiaal uit de syllabus Topologie (inclusief de opgaven). Indien u gebruik wenst te maken van een resultaat uit de sets oefenopgaven (zie de weken 1, 2, 5 en 8) dan dient u voor dat resultaat een (kort) argument te geven.

Opgave 1. Laat X, Y, Z topologische ruimten zijn en $f\colon Y \to X$ en $g\colon Z \to X$ continue afbeeldingen. Het *vezelproduct* van Y en Z over X is de deelruimte

$$\{(y,z) \in Y \times Z :\ f(y) = g(z)\}$$

van $Y \times Z$. Een gebruikelijke notatie voor het vezelproduct is $Y \times_X Z$ maar let erop dat in deze notatie de twee afbeeldingen f, g zijn weggevallen. Laat $p\colon Y \times Z \to Y$ de projectie op Y zijn en $q\colon Y \times Z \to Z$ de projectie op Z. We verkrijgen continue afbeeldingen $Y \times_X Z \to Y$ en $Y \times_X Z \to Z$ die we evenzo met p en q noteren.

(i) Laat zien dat $Y \times_X Z$ aan de volgende universele eigenschap voldoet: laat T een topologische ruimte zijn met continue afbeeldingen $a\colon T \to Y$ en $b\colon T \to Z$ zodat $f \circ a = g \circ b$. Dan bestaat er een unieke continue afbeelding $h\colon T \to Y \times_X Z$ zodat $p \circ h = a$ en $q \circ h = b$.

(ii) Veronderstel dat de afbeelding $Z \to X$ de inclusie $i\colon Z \to X$ van een deelruimte van X in X is. Beschrijf een homeomorfisme $f^{-1}Z \xrightarrow{\sim} Y \times_X Z$.

(iii) Veronderstel dat $g\colon Z \to X$ een overdekkingsafbeelding is. Laat zien dat $p\colon Y \times_X Z \to Y$ een overdekkingsafbeelding is.

(iv) Zij G een groep. Veronderstel dat $g\colon Z \to X$ een G-overdekking is. Laat zien dat $p\colon Y \times_X Z \to Y$ een G-overdekking is.

Opgave 2. Laat $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding zijn en schrijf $G = \mathrm{Aut}(Y/X)$. Beschouw G als een topologische ruimte voorzien van de discrete topologie.

(i) Laat zien dat de toekenning $\mu\colon (y, g) \mapsto (y, g\cdot y)$ een continue afbeelding $Y \times G \to Y \times_X Y$ definieert.

(ii) Laat zien dat μ open is ~~en injectief~~.

(iii) Bewijs dat μ een homeomorfisme is dan en slechts dan als $p\colon Y \to X$ een G-overdekking is.

Onderdeel (iii) kan geïnterpreteerd worden als: de overdekkingsafbeelding $p\colon Y \to X$ is een G-overdekking van X dan en slechts dan als de projectie op de eerste coördinaat $Y \times_X Y \to Y$ een triviale G-overdekking is van Y. De implicatie “$\Rightarrow$” kan in de context van Fulton, Hoofdstuk 14 ook als volgt worden ingezien.

(iv) Neem aan dat X een samenhangende en lokaal wegsamenhangende ruimte is, en neem aan dat X een universele overdekkingsafbeelding $u\colon \tilde{X} \to X$ toelaat. Zij $p\colon Y \to X$ een G-overdekking, en kies een basispunt $y \in Y$. Laat $\rho\colon \pi_1(X,x) \to G$ het groepshomomorfisme zijn dat correspondeert met $p\colon (Y,y) \to (X,x)$ volgens Fulton, Proposition 14.1. Verifieer met behulp van de definitie van ρ dat de samenstelling $\rho \circ p_*\colon \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X,x) \to G$ het triviale groepshomomorfisme is.

Opgave 3. Zij G een groep. We verwijzen naar het dictaat Algebra 1, §8 voor de notie van de *abels gemaakte* groep G_{ab} van G. De natuurlijke projectie van G op G_{ab} noteren we met $p\colon G \to G_{\mathrm{ab}}$.

(i) Laat zien dat G_{ab} aan de volgende universele eigenschap voldoet. Laat H een abelse groep zijn, voorzien van een groepshomomorfisme $f\colon G \to H$. Dan bestaat er een uniek groepshomomorfisme $\bar{f}\colon G_{\mathrm{ab}} \to H$ zodat $f = \bar{f} \circ p$.

Laat B, C twee abelse groepen zijn, en $B \oplus C$ hun directe som (zie het dictaat Algebra 2, §16). Bekijk dan de groepshomomorfismen $i_B\colon B \to B \oplus C$ en $i_C\colon C \to B \oplus C$ gegeven door $i_B(b) = (b, 0)$ voor alle $b \in B$ en $i_C(c) = (0, c)$ voor alle $c \in C$. De directe som $B \oplus C$ voldoet aan de volgende universele eigenschap: laat H een abelse groep zijn met groepshomomorfismen $m\colon B \to H$ en $n\colon C \to H$. Dan is er een uniek groepshomomorfisme $f\colon B \oplus C \to H$ zodat $f \circ i_B = m$ en $f \circ i_C = n$. (U hoeft dit hier niet te bewijzen.)

(ii) Zij $B * C$ de vrije groep voortgebracht door B en C. Laat zien dat $B \oplus C$ op natuurlijke wijze isomorf is met de abels gemaakte groep $(B * C)_{\mathrm{ab}}$.

Opgave 4. Beschouw de ruimte $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{Z} \vee y \in \mathbb{Z}\}$ als deelruimte van $\mathbb{R}^2$. Zij X een 8-figuur.

(i) Construeer een overdekkingsafbeelding $p\colon Y \to X$ die regulier is met automorfismengroep $\mathrm{Aut}(Y/X)$ isomorf met $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Hint: zij $T = S^1 \times S^1$ de torus. De universele overdekkingsafbeelding $u\colon \mathbb{R}^2 \to T$ is regulier met automorfismengroep isomorf met $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(ii) Laat zien dat de fundamentaalgroep van Y isomorf is met de commutatorondergroep van $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.