Introduction to Algebraic Topology, najaar 2017, huiswerkset 4

De inleverdatum voor deze huiswerkset is maandag 18 december. Lever uw opgaven bij voorkeur op papier in in het postvakje van Stefan van der Lugt. Lukt dit niet, dan gelieve uw opgaven per email te sturen aan `algtop2017@gmail.com`. Samenwerken is toegestaan, maar overschrijven uiteraard niet. U mag gebruik maken (maar dan wel met verwijzingen) van de stof uit colleges 1–12, van het materiaal uit Fulton: Hoofdstukken 11–14, en Lee: pp. 339–365, en al het materiaal uit de syllabus Topologie (inclusief de opgaven). Indien u gebruik wenst te maken van een resultaat uit de sets oefenopgaven (zie de weken 1, 2, 5, 8 en 11) dan dient u voor dat resultaat een (kort) argument te geven.

Opgave 1. Zij X een topologische ruimte en laat

$$C_*(X)\colon \cdots \to C_{p+1}(X) \to C_p(X) \to C_{p-1}(X) \to \cdots$$

met randafbeeldingen $\partial_p\colon C_p(X) \to C_{p-1}(X)$ het singuliere ketencomplex zijn van X. Zij G een abelse groep. Voor alle $p \in \mathbb{Z}$ zetten we $C^p(X) := \mathrm{Hom}(C_p(X), G)$, voorzien van de natuurlijke structuur van abelse groep. Er is voor elke $p \in \mathbb{Z}$ een natuurlijk groepshomomorfisme $\partial^p\colon C^p(X) \to C^{p+1}(X)$ gegeven door $f \in \mathrm{Hom}(C_p(X), G)$ te sturen naar $f \circ \partial_{p+1} \in \mathrm{Hom}(C_{p+1}(X), G)$.

(i) Laat zien dat de groepshomomorfismen $\partial^p\colon C^p(X) \to C^{p+1}(X)$ tezamen een ketencomplex

$$C^*(X)\colon \cdots \to C^{p-1}(X) \to C^p(X) \to C^{p+1}(X) \to \cdots$$

van abelse groepen vormen.

We definiëren voor elke $p \in \mathbb{Z}$ de abelse groepen

$$Z^p(X,G) = \{f \in C^p(X)\colon \partial^p f = 0\}\,, \quad B^p(X,G) = \{\partial^{p-1} g\colon g \in C^{p-1}(X)\}$$

en de quotiëntgroep

$$H^p(X,G) = Z^p(X,G)/B^p(X,G)\,.$$

(ii) Zij $\mathrm{Map}(X,G) = \{f\colon X \to G\}$ de groep van functies van X naar G. Geef een isomorfisme van abelse groepen $C_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{(X)} = \bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z}\cdot x$ en laat zien dat de afbeelding $\varphi \mapsto \langle x \mapsto \varphi(x)\rangle$ een isomorfisme van abelse groepen $\xi\colon C^0(X,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}(X,G)$ definieert.

(iii) Neem aan dat X lokaal wegsamenhangend is, en zij $f \in \mathrm{Map}(X,G)$. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

1. $\partial^0 f = 0$, waarbij f via ξ wordt opgevat als element van $C^0(X,G)$.
2. f is constant op alle wegsamenhangscomponenten van X.
3. f is lokaal constant.[1]

Er volgt dat we $H^0(X,G)$ op natuurlijke wijze kunnen identificeren met de groep van lokaal constante G-waardige functies op X.

(iv) Laat zien dat voor $X = \{\cdot\}$ een punt geldt $H^0(X,G) \cong G$, en $H^p(X,G) = 0$ als $p > 0$.

[1] Zij Y een topologische ruimte, en A een verzameling. Een functie $f\colon Y \to A$ heet *lokaal constant* als voor elke $y \in Y$ er een open omgeving U van y in Y bestaat zodat f constant is op U.

Opgave 2. Zij $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en laat $x_1, \ldots, x_n$ punten zijn in $\mathbb{R}^2$ die onderling op afstand minstens 3 van elkaar afliggen. Voor $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ noteren we met $B(x_i, \epsilon)$ de open bol en met $\overline{B}(x_i, \epsilon)$ de gesloten bol met middelpunt x_i en straal ϵ. Laat $X = \mathbb{R}^2 \setminus \big(\overline{B}(x_1, 1/2) \cup \ldots \cup \overline{B}(x_n, 1/2)\big)$.

(i) Laat zien dat voor de homologiegroepen van X geldt:

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}\,, \quad H_1(X) \cong \mathbb{Z}^n\,, \quad H_p(X) = 0 \quad \text{als } p > 1\,.$$

Hint: voer inductie naar n. Voor het geval $n = 1$: zie Lee, Corollary 13.24 voor de homologiegroepen van $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{punt}\}$. Voor de inductiestap, laat $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big(\overline{B}(x_1, 1/2) \cup \ldots \cup \overline{B}(x_{n-1}, 1/2)\big)$ en $V = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(x_n, 1/2)$ en pas Mayer-Vietoris toe.

Laat $A = X \cap (B(x_1, 1) \cup \ldots \cup B(x_n, 1))$.

(ii) Laat zien dat voor de homologiegroepen van A geldt:

$$H_0(A) \cong \mathbb{Z}^n\,, \quad H_1(A) \cong \mathbb{Z}^n\,, \quad H_p(A) = 0 \quad \text{als } p > 1\,.$$

Hint: de “annulus” $B(x_i, 1) \setminus \overline{B}(x_i, 1/2)$ is homotopie-equivalent met S^1.

Laat X^+, X^- twee kopieën van X zijn, en zij M de ruimte verkregen door X^+ en X^- te plakken langs de identiteit $\mathrm{id}\colon A \to A$.

(iii) Laat zien dat voor de homologiegroepen van M geldt:

$$H_0(M) \cong \mathbb{Z}\,, \quad H_1(M) \cong \mathbb{Z}^{2n-1}\,, \quad H_p(M) = 0 \quad \text{als } p > 1\,.$$