Introduction to Algebraic Topology, najaar 2017, oefenopgaven - week 2

Opgave 1. (i) Laat $p_1 : Y_1 \to X_1$ en $p_2 : Y_2 \to X_2$ overdekkingsafbeeldingen zijn. Laat zien dat de productafbeelding $Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ gegeven door $(y_1, y_2) \mapsto (p_1(y_1), p_2(y_2))$ een overdekkingsafbeelding is.

(ii) Geef een homeomorfisme $\mathbb{R}_{>0} \times S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*$. Hint: poolcoördinaten.

(iii) Laat zien dat de afbeelding $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}\times S^1$ gegeven door $(x, y) \mapsto (\exp(x), \exp(iy))$ een overdekkingsafbeelding is.

(iv) Laat zien dat de afbeelding $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ gegeven door $z \mapsto \exp(z)$ een overdekkingsafbeelding is.

(v) Laat $2\pi i\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ op $\mathbb{C}$ werken door middel van translaties. Zij $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/(2\pi i\mathbb{Z})$ de quotiëntafbeelding. Laat zien dat er een unieke continue afbeelding $\bar{p} : \mathbb{C}/(2\pi i\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^*$ bestaat zodat $\bar{p} \circ q = p$. Laat zien dat $\bar{p}$ bijectief is en open. Concludeer dat $\bar{p}$ een homeomorfisme is.

Opgave 2. Neem de volgende uitspraak ("uniciteit van lifts"), die we op het volgende college zullen bewijzen, voor waar aan: laat $p : Y \to X$ een overdekkingsafbeelding zijn, laat Z een samenhangende topologische ruimte zijn, laat $q : Z \to X$ een continue afbeelding zijn, en laat $f, g : Z \to Y$ twee lifts zijn van q langs p, d.w.z. f, g zijn continu met de eigenschap dat $p \circ f = p \circ g = q$. Stel er bestaat een $z \in Z$ met $f(z) = g(z)$. Dan is $f = g$.

(i) Laat $p : Y \to X$ een overdekkingsruimte zijn. Laat $s : X \to Y$ een continue sectie zijn van p, d.w.z. $s : X \to Y$ is continu en de gelijkheid $p \circ s = \mathrm{id}_X$ geldt. Neem aan dat Y samenhangend is. Bewijs dat p een homeomorfisme is (met inverse s).

(ii) Laat $p = \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ de overdekkingsafbeelding zijn uit Opgave 1(iv). We zouden graag een continue sectie

$$s = \log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$$

willen hebben. Laat zien dat een dergelijke continue sectie niet bestaat.

(iii) Zij $X = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_{>0}$ en laat $Y = p^{-1}X \subset \mathbb{C}^*$. Maak een tekening van Y. Laat zien dat de beperking $r = p|_Y : Y \to X$ een overdekkingsafbeelding is. Laat zien dat r een triviale overdekkingsafbeelding is. Geef een continue sectie $s : X \to Y$ van r. U heeft nu een "tak van de logaritme" geconstrueerd.

Opgave 3. (i) Zij Y een topologische ruimte en $G \subseteq \mathrm{Aut}(Y)$ een eindige ondergroep. Neem aan dat Y Hausdorff is. Neem bovendien aan dat de werking van G op Y vrij is.[1] Laat zien dat de werking van G op Y even is.

(ii) Zij $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ en laat $G = \mu_m \subset \mathbb{C}^*$ de groep van m-de eenheidswortels zijn. Zij $Y = S^{2k-1}$ een oneven-dimensionale sfeer. Geef een even (in het bijzonder, vrije) werking van G op Y. Hint: Y is de eenheidssfeer in $\mathbb{C}^k$.

Opmerking: we zullen later bewijzen dat voor $m \in \mathbb{Z}_{>2}$ en $Y = S^{2k}$ een *even*-dimensionale sfeer, er *geen* vrije werking van $G = \mu_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ op Y bestaat.

[1] Een (links)werking van een groep G op een verzameling X heet vrij als: laat $g \in G$ en $x \in X$ zijn met $g \cdot x = x$. Dan is g het neutrale element van G.

Opgave 4. Maak Exercise 11.14 uit Fulton's "Algebraic Topology: A first course". (Vergelijk met Opgave 117 uit de syllabus Topologie, versie 9 juni 2017).