Inleiding in de Algebraïsche Topologie, najaar 2019, huiswerkset 1

De deadline voor deze huiswerkset is zondag 29 september om 23:59 u. Lever uw opgaven bij voorkeur op papier in in het postvakje van Stefan van der Lugt. Lukt dit niet, dan gelieve uw opgaven per email te sturen aan `algtop2019@gmail.com`. (NB: Gebruik dit emailadres alleen voor het inleveren van huiswerk, niet voor het stellen van vragen.) Het gebruik van LaTeXwordt ten zeerste aanbevolen. Samenwerken is toegestaan, maar overschrijven uiteraard niet. U mag gebruik maken (maar dan wel met verwijzingen) van de stof uit colleges 1–2, van het materiaal uit Fulton, Secties 11a–d, 12a,b en al het materiaal uit de syllabus Topologie (inclusief de opgaven). Indien u gebruik wenst te maken van een resultaat uit de set oefenopgaven van week 1 dan dient u voor dat resultaat een (kort) argument te geven.

Opgave 1. (i) Laat $p_1 \colon Y_1 \to X_1$ en $p_2 \colon Y_2 \to X_2$ overdekkingsafbeeldingen zijn. Laat zien dat de productafbeelding $Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ gegeven door $(y_1, y_2) \mapsto (p_1(y_1), p_2(y_2))$ een overdekkingsafbeelding is.

(ii) Laat zien dat de afbeelding $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{>0} \times S^1$ gegeven door $(x, y) \mapsto (\exp(x), \exp(iy))$ een overdekkingsafbeelding is.

(iii) Geef een homeomorfisme $\mathbb{R}_{>0} \times S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*$. Hint: poolcoördinaten.

(iv) Laat zien dat de afbeelding $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ gegeven door $z \mapsto \exp(z)$ een overdekkingsafbeelding is.

Opgave 2. (i) Laat $p \colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding zijn. Laat $s \colon X \to Y$ een sectie zijn van p, d.w.z. $s \colon X \to Y$ is continu en de gelijkheid $p \circ s = \mathrm{id}_X$ geldt. Neem aan dat Y samenhangend is. Bewijs dat p een homeomorfisme is (met inverse s).

(ii) Laat $\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ de overdekkingsafbeelding zijn uit Opgave 1(iv). Laat zien dat er geen sectie $\log \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ van exp bestaat.

(iii) In deze opgave construeren we een "tak van de logaritme". Zij $X = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_{>0}$ en laat $Y = \exp^{-1} X \subset \mathbb{C}^*$. Beschrijf de samenhangscomponenten van Y. Zij $p = \exp|_Y \colon Y \to X$. Construeer een sectie $s \colon X \to Y$ van p. Laat zien dat p een triviale overdekkingsafbeelding is.

Opgave 3. Laat $q \colon Z \to X$ en $p \colon Y \to X$ overdekkingsafbeeldingen zijn. Laat $g \colon Z \to Y$ een continue afbeelding zijn zodat $p \circ g = q$. Zij $x \in X$ en schrijf $Z_x = q^{-1}\{x\}$ en $Y_x = p^{-1}\{x\}$.

(i) Laat zien dat de afbeelding $g|_{Z_x} \colon Z_x \to Y_x$ compatibel is met de natuurlijke rechtswerking $*$ van $\pi_1(X, x)$ die besproken wordt in Hoofdstuk 14 van de syllabus Topologie. Preciezer gezegd, laat zien dat voor alle $\alpha \in \pi_1(X, x)$ en alle $z \in Z_x$ de gelijkheid $g(z * \alpha) = g(z) * \alpha$ geldt.

(ii) Laat $\varphi \in \mathrm{Aut}(Y/X)$ een automorfisme zijn van de overdekkingsafbeelding $p \colon Y \to X$. Laat $y, y' \in Y_x$ elementen zijn met $\varphi(y) = y'$. Laat zien dat de stabilisatoren Stab_y resp. $\mathrm{Stab}_{y'}$ van y resp. y' voor de natuurlijke rechtswerking van $\pi_1(X, x)$ op Y_x gelijk zijn in $\pi_1(X, x)$.

(iii) Bekijk de 3-bladige overdekkingsafbeelding $p \colon Y \to X$ uit Exercise 11.14 uit Fulton's "Algebraic Topology: A first course". Laat zien dat $p \colon Y \to X$ geen G-overdekking is.