**Inleiding in de Algebraïsche Topologie, najaar 2019, huiswerkset 2**

De deadline voor deze huiswerkset is zondag 20 oktober om 23:59 u. Lever uw opgaven bij voorkeur op papier in in het postvakje van Stefan van der Lugt. Lukt dit niet, dan gelieve uw opgaven per email te sturen aan `algtop2019@gmail.com`. (NB: Gebruik dit emailadres alleen voor het inleveren van huiswerk, niet voor het stellen van vragen.) Het gebruik van LaTeXwordt ten zeerste aanbevolen. Samenwerken is toegestaan, maar overschrijven uiteraard niet. U mag gebruik maken (maar dan wel met verwijzingen) van de stof uit colleges 1–4, van het materiaal uit Fulton, Secties 11a–d, 12a,b, 13a,b en al het materiaal uit de syllabus Topologie (inclusief de opgaven). Indien u gebruik wenst te maken van een resultaat uit de set oefenopgaven van week 1 dan dient u voor dat resultaat een (kort) argument te geven.

In de volgende opgaven is $X$ een topologische ruimte die zowel **samenhangend** als **lokaal wegsamenhangend** is.

**Opgave 1.** Veronderstel dat er een universele overdekkingsafbeelding $u\colon \widetilde{X} \to X$ bestaat. Zij $V \subseteq X$ een wegsamenhangende open deelverzameling zodat de overdekkingsafbeelding $u|_{u^{-1}V}\colon u^{-1}V \to V$ triviaal is.

(i) Laat zien dat het natuurlijke groepshomomorfisme $\pi_1(V) \to \pi_1(X)$ geïnduceerd door de inclusie $V \to X$ de nulafbeelding is.

(ii) Leid uit (i) af dat $X$ *semi-lokaal enkelvoudig samenhangend* is, dat wil zeggen ieder punt van $X$ heeft een open omgeving zodat elke lus die geheel in die open omgeving afbeeldt weghomotoop is in $X$ met een constante weg in $X$.

**Opgave 2.** Zij $p\colon Y \to X$ een $G$-overdekking met $Y$ wegsamenhangend. Laat $H \subset G$ een ondergroep zijn. Laat $Z = Y/H$. Op college hebben we gezien dat de natuurlijke afbeelding $\overline{p}\colon Z \to X$ gegeven door de universele eigenschap van quotiëntruimtes een overdekkingsafbeelding is. Veronderstel nu dat $H$ een *normaaldeler* is van $G$.

(i) Zij $\varphi \in G$. Laat zien dat de afbeelding $\overline{\varphi}\colon Z \to Z$ gegeven door $[y] \mapsto [\varphi(y)]$ voor $y \in Y$ goed gedefinieerd en continu is. Hier schrijven we $[y]$ voor het beeld van $y \in Y$ in $Z = Y/H$.

(ii) Laat zien dat $\overline{\varphi} \in \mathrm{Aut}(Z/X)$.

(iii) Laat zien dat de afbeelding $G \to \mathrm{Aut}(Z/X)$ gegeven door $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ een surjectief groepshomomorfisme is met kern gelijk aan $H$.

(iv) Laat zien dat de afbeelding $\overline{p}\colon Z \to X$ een $(G/H)$-overdekking is.

**Opgave 3.** Zij $Y = \mathbb{R}^2$. Zij $G$ de ondergroep van de groep $\mathrm{Aut}(Y)$ van zelf-homeomorfismen van $Y$ voortgebracht door de afbeeldingen $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ en $(x, y) \mapsto (-x, y + 1)$.

(i) Laat zien dat de groep $G$ niet abels is.

(ii) Laat zien dat de quotiëntafbeelding $p\colon Y \to K = Y/G$ een $G$-overdekking is. (Leuk weetje: de ruimte $K$ is homeomorf met de *fles van Klein*.)

(iii) Zij $H \subset G$ de ondergroep voortgebracht door de afbeeldingen $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ en $(x, y) \mapsto (x, y + 2)$. Laat zien dat $H$ een normaaldeler is van $G$ en construeer een groepsisomorfisme $G/H \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_2 = \{-1, +1\}$.

(iv) Zij $T = S^1 \times S^1$. Construeer een homeomorfisme $Y/H \xrightarrow{\sim} T$.

(v) Laat zien dat er een $\boldsymbol{\mu}_2$-overdekking $q\colon T \to K$ bestaat.