Introduction to Algebraic Topology, najaar 2019, huiswerkset 5

De deadline voor deze huiswerkset is zondag 22 december om 23:59 u. Lever uw opgaven bij voorkeur op papier in in het postvakje van Stefan van der Lugt. Lukt dit niet, dan gelieve uw opgaven per email te sturen aan `algtop2019@gmail.com`. (NB: Gebruik dit emailadres alleen voor het inleveren van huiswerk, niet voor het stellen van vragen.) Het gebruik van LaTeXwordt ten zeerste aanbevolen. Samenwerken is toegestaan, maar overschrijven uiteraard niet. U mag gebruik maken (maar dan wel met verwijzingen) van de stof uit colleges 1–12, van het materiaal uit Fulton, Hoofdstukken 11–14, uit Hoofdstukken 1–3 van de syllabus van Looijenga en al het materiaal uit de syllabussen Algebra 1 en Topologie (inclusief de opgaven). Indien u gebruik wenst te maken van een resultaat uit de set oefenopgaven van week 1, 6, 8 of 9 dan dient u voor dat resultaat een (kort) argument te geven.

Opgave 1. Zij X een topologische ruimte en laat

$$C_\bullet(X)\colon\ \cdots \to C_{p+1}(X) \to C_p(X) \to C_{p-1}(X) \to \cdots$$

met randafbeeldingen $d_p\colon C_p(X) \to C_{p-1}(X)$ het singuliere ketencomplex zijn van X. Zij G een abelse groep. Voor alle $p \in \mathbb{Z}$ zetten we $C^p(X,G) := \mathrm{Hom}(C_p(X), G)$, voorzien van de natuurlijke structuur van abelse groep. Er is voor elke $p \in \mathbb{Z}$ een natuurlijk groepshomomorfisme $d^p\colon C^p(X,G) \to C^{p+1}(X,G)$ gegeven door $f \in \mathrm{Hom}(C_p(X), G)$ te sturen naar $f \circ d_{p+1} \in \mathrm{Hom}(C_{p+1}(X), G)$.

(i) Laat zien dat de groepshomomorfismen $d^p\colon C^p(X,G) \to C^{p+1}(X,G)$ tezamen een ketencomplex

$$C^\bullet(X,G)\colon\ \cdots \to C^{p-1}(X,G) \to C^p(X,G) \to C^{p+1}(X,G) \to \cdots$$

van abelse groepen vormen.

We definiëren voor elke $p \in \mathbb{Z}$ de abelse groepen

$$Z^p(X,G) = \{f \in C^p(X,G)\colon d^p f = 0\}\,, \quad B^p(X,G) = \{d^{p-1}g\colon g \in C^{p-1}(X,G)\}$$

en de quotiëntgroep

$$H^p(X,G) = Z^p(X,G)/B^p(X,G)\,.$$

(ii) Zij $\mathrm{Map}(X,G) = \{f\colon X \to G\}$ de groep van functies van X naar G. Geef een isomorfisme van abelse groepen $C_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{(X)} = \bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z}\cdot x$ en laat zien dat de afbeelding $\varphi \mapsto \langle x \mapsto \varphi(x)\rangle$ een isomorfisme van abelse groepen $\xi\colon C^0(X,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}(X,G)$ definieert.

(iii) Neem aan dat X lokaal wegsamenhangend is, en zij $f \in \mathrm{Map}(X,G)$. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

1. $d^0 f = 0$, waarbij f via ξ wordt opgevat als element van $C^0(X,G)$.
2. f is constant op alle wegsamenhangscomponenten van X.
3. f is lokaal constant.[1]

Er volgt dat we $H^0(X,G)$ op natuurlijke wijze kunnen identificeren met de groep van lokaal constante G-waardige functies op X.

[1] Zij Y een topologische ruimte, en A een verzameling. Een functie $f\colon Y \to A$ heet *lokaal constant* als voor elke $y \in Y$ er een open omgeving U van y in Y bestaat zodat f constant is op U.

Opgave 2. Zij X een topologische ruimte en $A \subset X$ een deelruimte met inclusieafbeelding $i\colon A \to X$. Een continue afbeelding $r\colon X \to A$ heet een *retractie* als $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Een retractie $r\colon X \to A$ heet een *deformatieretractie* als er een homotopie bestaat tussen $i \circ r$ en id_X.

(i) Zij $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en zij $r\colon X \to A$ een deformatieretractie. Laat zien dat de geïnduceerde afbeelding $r_*\colon H_k(X) \to H_k(A)$ een isomorfisme van abelse groepen is.

(ii) Zij $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Geef een deformatieretractie $r\colon \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \to S^m$. Bepaal hiermee alle singuliere homologiegroepen van $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$.

Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, en laat $P_1, \ldots, P_n$ onderling verschillende punten zijn in $\mathbb{R}^2$. We definiëren $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$.

(iii) Laat zien dat voor de homologiegroepen van Y geldt:

$$H_0(Y) \cong \mathbb{Z}\,, \quad H_1(Y) \cong \mathbb{Z}^n\,, \quad H_k(Y) = 0 \quad \text{als } k > 1\,.$$

Hint: voer inductie naar n. Voor de inductiestap, pas Mayer-Vietoris toe.

Opgave 3. Zij $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en laat $G \subset \mathrm{Aut}(S^n)$ een ondergroep zijn. We zeggen dat G *vrij werkt* op S^n als voor alle $g \in G$ en alle $x \in S^n$ geldt: $g \cdot x = x \Rightarrow g = \mathrm{id}_{S^n}$. Veronderstel nu dat n *even* is, en dat G vrij werkt op S^n. Laat $g, h \in G$ twee elementen zijn, beide ongelijk aan id_{S^n}.

(i) Laat zien dat g en h beide graad -1 hebben.

(ii) Laat zien dat $gh = \mathrm{id}_{S^n}$.

(iii) Laat zien dat G triviaal is of isomorf met $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(iv) Zij X een groep met groepsbewerking $m\colon X \times X \to X$ en inverse $i\colon X \to X$. Neem aan dat X voorzien is van een topologie. We noemen X een *topologische groep* als de afbeeldingen m en i continu zijn. Laat zien dat voor n even de sfeer S^n niet van de structuur van een topologische groep kan worden voorzien.

Opmerking: in Exercise 11.30 van Fulton wordt bewezen dat er voor elke $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en elke *oneven* n een even (en dus in het bijzonder vrije) werking van de eindige cyclische groep $\boldsymbol{\mu}_k$ bestaat op S^n. Verder merken we op dat de cirkel S^1 een topologische groep is, en de sfeer S^3 ook, namelijk S^3 kan gerealiseerd worden als de ondergroep van de eenhedengroep van de Hamiltonse quaternionen bestaande uit elementen waarvan de norm gelijk is aan 1 (zie bijvoorbeeld Problem 11.33 in Fulton). Dit patroon zet zich niet voort; in een master-college Algebraic Topology of Lie Groups zou kunnen worden bewezen dat de sferen S^n voor $n > 3$ en n oneven *niet* van de structuur van een topologische groep kunnen worden voorzien.