Inleiding in de Algebraïsche Topologie, najaar 2019, oefenopgaven - week 6

Opgave 1. Veronderstel dat de ruimte X samenhangend en lokaal wegsamenhangend is, en een universele overdekkingsruimte heeft. Zij $x \in X$, zij $H \subseteq \pi_1(X,x)$ een ondergroep en veronderstel dat H eindige index d heeft in $\pi_1(X,x)$. Laat zien dat de overdekkingsafbeelding $p\colon Y \to X$ die bij H hoort via de Galois-correspondentie een d-bladige overdekkingsafbeelding is.

Opgave 2. Zij S^1 de cirkel, zij $Y = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $X = S^1 \times S^1$. Zij $p\colon Y \to X$ de overdekkingsafbeelding gegeven door $(u,v) \mapsto (\exp(2\pi i u), \exp(2\pi i v))$. Laat $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ een viertal elementen zijn waarvoor geldt dat $ad - bc \neq 0$. Laat $q\colon X \to X$ de continue afbeelding zijn gegeven door $(z,w) \mapsto (z^a w^b, z^c w^d)$.

(i) Beschrijf een homeomorfisme $\tilde{q}\colon Y \to Y$ met $\tilde{q}(0,0) = (0,0)$ zodat het diagram

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde{q}"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "q"] & X \end{tikzcd}$$

commutatief is.

(ii) Laat zien dat een dergelijke $\tilde{q}$ uniek is.

(iii) Laat zien dat $q\colon X \to X$ een overdekkingsafbeelding is met eindig veel bladen. Bereken het aantal bladen van $q\colon X \to X$.

Opgave 3. Als π een groep is en S een rechts-π-verzameling, dan definiëren we de verzameling

$$\mathrm{Aut}_\pi(S) = \{f\colon S \to S \text{ bijectie} : \forall \alpha \in \pi\, \forall s \in S\colon f(s \cdot \alpha) = f(s) \cdot \alpha\}.$$

(i) Laat zien dat de verzameling $\mathrm{Aut}_\pi(S)$ een groep vormt met als groepsbewerking samenstelling van afbeeldingen.

Zij X een samenhangende en lokaal wegsamenhangende ruimte. Laat $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding zijn met Y samenhangend. Kies een basispunt $x \in X$ en laat Y_x de vezel zijn van p boven x. De monodromiewerking maakt van Y_x op natuurlijke wijze een rechts-π-verzameling, waarbij $\pi = \pi_1(X,x)$.

(i) Laat zien dat de toekenning $\varphi \mapsto \varphi|_{Y_x}$ een groepshomomorfisme

$$\psi\colon \mathrm{Aut}(Y/X) \to \mathrm{Aut}_\pi(Y_x)$$

levert.

(ii) Bewijs dat ψ een groepsisomorfisme is.

Opgave 4. Maak Opgave 14.3 uit Fulton.