Berekenbaarheid in algebraïsche meetkunde (Ronald van Luijk)

Algebraïsche meetkunde over een lichaam k bestudeert de nulpuntsverzamelingen van een stel polynomen $f_1, \ldots, f_r \in R = k[x_1, \ldots, x_n]$ in de n-dimensionale affiene ruimte met coördinaten $x_1, \ldots, x_n$. Het polynoom $x_1^2 + x_2^2 - 1 \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ beschrijft bijvoorbeeld de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$. Het polynoom $x_1 x_2$ geeft de vereniging van de x_1- en de x_2-as. Beide zijn 1-dimensionale *variëteiten*, die we *krommen* noemen.

Meestal heeft de nulpuntsverzameling van $r < n$ polynomen in de n-dimensionale ruimte dimensie $n - r$, maar dat is zeker niet altijd het geval. Zo is de gezamenlijke nulpuntsverzameling binnen $\mathbb{R}^4$ van de drie polynomen $x_2x_4 - x_3^2$, $x_1x_3 - x_2^2$ en $x_1x_4 - x_2x_3$ het oppervlak geparametriseerd door

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s^3, s^2t, st^2, t^3),$$

dus het heeft dimensie 2.

Hoe kunnen we de dimensie van een variëteit V bepalen als we alleen de polynomen kennen waar V de nulpuntsverzameling van is? Een methode die we hier kunnen toepassen gebruikt Gröbnerbases. Dit is een speciale verzameling voortbrengers van het ideaal $I = (f_1, \ldots, f_r) \subset R$. Met behulp van zo'n Gröbnerbasis kunnen ook veel andere eigenschappen van een variëteit bepaald worden. Het probleem is helaas wel dat het berekenen van zo'n basis voor een gegeven ideaal I erg lang kan duren.

Dit project bestaat uit

- het begrijpen van algebraïsche variëteiten (affien en projectief) en enkele eigenschappen daarvan, zoals dimensie en graad,
- het begrijpen van Gröbnerbases en de berekening daarvan,
- het begrijpen hoe Gröbnerbases gebruikt kunnen worden om sommige eigenschappen te bepalen, zoals dimensie, graad en irreducibiliteit.

Voorkennis van algebraïsche meetkunde is erg handig voor dit project.

Literatuur:

(1) Eerste hoofdstuk van R. Hartshorne's *Algebraic Geometry.*
(2) D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms.*