Foutgrenzen voor binaire tomografie

K.J. Batenburg

Eén van de aandachtsgebieden in de discrete tomografie is het reconstrueren van binaire roosterbeelden uit een eindig aantal projecties, waarbij elk van de projecties bestaat uit de lijnsommen van het beeld voor alle lijnen in een bepaalde richting.

Zij n een geheel getal groter dan 0, zij $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x < n; 0 \leq y < n\}$ en $f : A \to \{0, 1\}$ een beeld op A (denk hierbij aan een vierkant zwart-wit plaatje), dat aan elk roosterpunt in A een waarde uit $\{0, 1\}$ toekent. Zij $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ copriem, met $a \geq 0$. We noemen zo'n paar (a, b) een *richting*. Definieer de *projectie* $p_{(a,b)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ als volgt:

$$p_{(a,b)}(t) = \sum_{ay=bx+t} f(x, y)$$

waarbij we stellen dat $f(x, y) = 0$ als $(x, y) \notin A$. We gaan nu uit van een gegeven verzameling $D = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_d, b_d)\}$ van paarsgewijs verschillende richtingen waarvoor de projecties gegeven zijn, maar waarvoor het bijbehorend beeld niet bekend is. Dit leidt tot verschillende problemen, zoals consistentie (is er een beeld met de gegeven projecties?), uniciteit (is de oplossing uniek?) en reconstructie (bestaat er een efficiënt algoritme dat één, of alle oplossingen vindt?).

Over het algemeen is de oplossing van dergelijke tomografie-problemen niet uniek bepaald. Een interessante vraag is dan in hoeveel punten een tweetal oplossingen van elkaar kan verschillen. In dit project zullen we bovengrenzen gaan afleiden voor dit verschil, door gebruik te maken van de (lineaire) algebraïsche eigenschappen van het tomografie-probleem. De basis voor deze foutgrenzen is te vinden in het artikel [1], maar door gebruik te maken van lineaire programmering kunnen deze grenzen worden gegeneraliseerd en verscherpt. Door rekenexperimenten uit te voeren met verschillende bovengrenzen voor de fout kunnen verschillende grenzen met elkaar worden vergeleken.

[1] K.J. Batenburg, W. Fortes, L. Hajdu, en R. Tijdeman, "Bounds on the quality of reconstructed images in binary tomography", *Discrete Applied Mathematics*, **161**(15), 2236-2251, 2013.