**Idempotenten en eenheidswortels in groepenringen**

Dit project behoort grotendeels tot de algebra, maar het heeft ook een getaltheoretische component.

Stel $A$ is een commutatieve ring. Dan is een *idempotent* in $A$ een element $e \in A$ met $e^2 = e$, en een *eenheidswortel* in $A$ is een element van eindige orde van de eenhedengroep $A^*$ van $A$. We schrijven $\mathrm{Id}(A)$ voor de verzameling idempotenten in $A$, en $\mu(A)$ voor de verzameling eenheidswortels in $A$. Voorbeeld: $\mathrm{Id}(\mathbf{Z}) = \{0, 1\}$, $\mu(\mathbf{Z}) = \{1, -1\}$.

Natuurlijk is $\mu(A)$ een ondergroep van $A^*$, maar ook $\mathrm{Id}(A)$ heeft een extra structuur: het is een *Boolese ring* wanneer men de "som" van twee idempotenten $e$ en $f$ definieert als $e + f - 2ef$, en het "product" als $ef$. Idempotenten zijn belangrijk als men wil onderzoeken op welke manier een ring als product van twee of meer ringen geschreven kan worden.

Het voornaamste doel van het project is om idempotenten en eenheidswortels te bestuderen wanneer $A$ een *groepenring* $R[G]$ is, met $R$ een commutatieve ring en $G$ een abelse groep. Voor $R = \mathbf{Z}$ is de situatie geheel onder controle: er geldt $\mathrm{Id}(\mathbf{Z}[G]) = \{0, 1\}$ en $\mu(\mathbf{Z}[G]) = \pm G_{\mathrm{tor}}$, waarbij $G_{\mathrm{tor}}$ de ondergroep van $G$ is die bestaat uit alle elementen van eindige orde van $G$. Van deze resultaten bestaat een grappig bewijs dat gebruikmaakt van een paar eigenschappen van complexe getallen.

De vraag is hoe de net genoemde resultaten gegeneraliseerd kunnen worden naar algemenere grondringen $R$. Met idempotenten ziet dit er veel eenvoudiger uit dan met eenheidswortels: de gevallen waarin geldt $\mathrm{Id}(R[G]) = \{0, 1\}$ laten een goede algebraïsche karakterisering toe, en met $\mathrm{Id}(R[G]) = \mathrm{Id}(R)$ ligt het niet anders. Met de eenheidswortels lijkt het daarentegen meer om getaltheorie dan om algebra te gaan: ringen $R$ die bestaan uit "algebraïsche gehele getallen" hebben, net als $\mathbf{Z}$, voor iedere $G$ de eigenschap $\mu(R[G]) = \mu(R) \cdot G_{\mathrm{tor}}$, maar het is onduidelijk of deze gelijkheid in een erg veel grotere algemeenheid geldt, en helemaal of men de vraag algebraïsch kan benaderen.

Het is ook interessant om alle genoemde kwesties te bestuderen voor modificaties van de groepenring $R[G]$, zoals $R[G]/(\sum_{\sigma \in G} \sigma)$ wanneer $G$ een *eindige* abelse groep is.

Het project bestaat eruit dat de student zich alle genoemde resultaten met bewijzen en al eigen maakt, en zich zo mogelijk ook over de open vragen buigt.

De voorkennis voor het project bestaat uit de colleges Algebra 1, 2 en 3. Kennis van algebraïsche getaltheorie is nuttig, maar deze kan ook tijdens het project verworven worden.

Begeleider: Hendrik Lenstra