De wiskunde van het jongleren

Bachelorproject, Leiden

Ronald van Luijk

Een *jongleerfunctie* is een bijectie $\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ waarvoor geldt $\rho(t) \geq t$ voor alle $t \in \mathbb{Z}$. Men kan hierover denken als de functie die aan elk tijdstip t_0 het tijdstip t_1 toevoegt dat de eerstvolgende keer is dat de bal die op tijdstip t_0 wordt gegooid weer wordt gegooid.

We gaan er dus vanuit dat er geen ballen tegelijk worden gegooid. We nemen bovendien aan dat er twee handen zijn die om en om gooien, zeg rechts op de even tijdstippen en links op de oneven. Een bal die op tijdstip t gegooid wordt wordt dus naar de andere hand gegooid dan en slechts dan als $\rho(t) - t$ oneven is. Tijdstippen t waarvoor geldt $\rho(t) = t$ zijn momenten dat de bijbehorende hand leeg is en er niets wordt gegooid.

Een *jongleerpatroon* van lengte n is een functie $\sigma\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ waarvoor de functie $\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gegeven door

$$\rho(t) = t + \sigma(t \bmod n)$$

een jongleerfunctie is. Zolang alle functiewaarden kleiner dan 10 zijn wordt een jongleerpatroon σ van lengte n vaak geschreven door de waarden $\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n-1)$ direct achter elkaar te zetten.

Jongleurs zijn al eeuwen op zoek naar nieuwe jongleerpatronen. We kunnen een wiskundige beschrijving geven van alle patronen en er wordt geclaimd dat het inmiddels beroemde patroon 441 door wiskundigen in de jongleerwereld is geïntroduceerd.

Er zijn veel leuke wiskundige vragen te stellen over jongleerpatronen.

- Hoe herken je of een functie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ een jongleerpatroon is?
- Hoeveel ballen zijn er nodig voor een bepaald patroon?
- Hoeveel patronen van lengte n zijn er die b ballen gebruiken?

Deze vragen zijn relatief eenvoudig en misschien heb je ze al eens tijdens een open dag gehoord. Maar de theorie gaat dieper, je kunt de jongleerfuncties bijvoorbeeld relateren aan een affiene Weylgroep. Je kunt alles nog interessanter maken als je de eis laat vallen dat er geen twee ballen tegelijk gegooid worden.

Het doel van dit project bestaat eruit zoveel mogelijk wiskundig interessante dingen te formuleren en bewijzen over jongleerpatronen en eventuele generalisaties. Het bestuderen van de relatie met de betreffende affiene Weylgroep zal daar zeker deel van uitmaken.

We zullen onder andere gebruik maken van het boek "The mathematics of juggling" van Burkard Polster [1]. Een pdf van dit boek is via onze bibliotheek (of bij mij) online gratis beschikbaar.

[1] Polster, B., *The mathematics of juggling*, Springer, 2003.