

De Stelling van Ramsey en toepassingen

Begeleider: Jan-Hendrik Evertse

De Stelling van Ramsey is een stelling over (hyper)grafen. Een speciaal geval zegt het volgende. Zij G_r de volledige graaf op r -punten, dat wil zeggen G_r bestaat uit de punten $\{1, \dots, r\}$ en elk ongeordend paar $\{i, j\}$ uit $\{1, \dots, r\}$ is een boog van G_r . We kennen aan elke boog van G_r een kleur rood of blauw toe.

Stelling. *Zijn k, m gehele getallen ≥ 2 . Dan geldt voor elke voldoende grote r en elke rood-blauw kleuring van de bogen van G_r , dat G_r een volledige deelgraaf op minstens k punten met alleen rode bogen, of een volledige deelgraaf op minstens m punten met alleen blauwe bogen heeft.*

De kleinste r waarvoor het bovenstaande geldt noemen we $n(k, m)$.

Voorbeeld. Bekijk een volledige graaf op zes punten en kleur de bogen rood of blauw. We laten zien dat er altijd een deelgraaf op drie punten met alleen rode bogen, of een deelgraaf op drie punten met alleen blauwe bogen is. Kies een punt a van de graaf. Dit punt is met vijf andere punten verbonden, dus het is met minstens drie punten verbonden door een boog van dezelfde kleur, zeg rood. Als twee van deze punten zijn verbonden door een rode boog dan vormen die samen met a een deelgraaf op drie punten met alleen rode bogen. Als deze punten alleen door blauwe bogen zijn verbonden dan vormen ze een deelgraaf op drie punten met alleen blauwe bogen. Het is niet moeilijk te laten zien dat $n(3, 3) = 6$.

De Stelling van Ramsey geeft een veralgemening, waarin volledige k -hypergrafen worden bekeken (dat wil zeggen voor de bogen nemen we alle deelverzamelingen van k elementen) en waarin aan elk van de deelverzamelingen van k elementen een kleur uit een gegeven eindige verzameling wordt toegekend.

De Stelling van Ramsey heeft allerlei toepassingen, waarvan we enkele noemen.

Stelling (Erdős, Szekeres). *Voor elk positief geheel getal $n \geq 3$ bestaat er een getal $N = N(n)$ zodat uit elke verzameling van N punten in het vlak waarvan er geen drie op een lijn liggen, er n punten kunnen worden gekozen die een convexe n -hoek vormen.*

De volgende toepassing is uit de getaltheorie. Neem aan dat r kleuren gegeven zijn. Een r -kleuring van een verzameling A kent aan elk element van A een van de r kleuren toe (dat wil zeggen we verdelen A in r deelverzamelingen).

Stelling (van der Waerden). *Voor alle positieve gehele getallen k, r is er een geheel getal $W(k, r)$ met de volgende eigenschap: voor elke r -kleuring van de*

verzameling $\{1, \dots, W(k, r)\}$ is er een rekenkundige rij in $\{1, \dots, W(k, r)\}$ waarin alle getallen dezelfde kleur hebben.

Een bachelorproject zou er uit kunnen bestaan om het bewijs van de Stelling van Ramsey uit te werken (niet zo moeilijk) en enkele toepassingen te bekijken, bijvoorbeeld bovengenoemde en een aantal andere. Dit project vereist geen specifieke voorkennis.