

Voronoi-polytopen van laag-dimensionale roosters (begeleider: R. de Jong)

Bekijk een eindig-dimensionale reële vectorruimte V voorzien van een inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Een *rooster* in V is een discrete ondergroep $\Lambda \subset V$ zodat $\text{rang}(\Lambda) = \dim(V)$. Roosters komen veelvuldig voor in de algebra, getaltheorie en meetkunde.

Voor $x \in V$ schrijven we $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Het *Voronoi-polytoop* van een rooster $\Lambda \subset V$ is de deelverzameling

$$\text{Vor}(\Lambda) = \{x \in V \mid \text{voor alle } \lambda \in \Lambda \text{ geldt dat } \|x\| \leq \|x - \lambda\|\}$$

van V . Een aantal belangrijke invarianten van Λ , zoals de *determinant*, de *overdekkingsstraal* en de *pakkingsstraal*, kan eenvoudig in termen van $\text{Vor}(\Lambda)$ worden uitgedrukt.

In dit project bestuderen we eigenschappen van het Voronoi-polytoop, met een nadruk op lage waarden van $\dim(V)$. In lage dimensies kan een fraaie classificatie van de combinatorische types van mogelijke Voronoi-polytopen worden gegeven aan de hand van *rooster-reductietheorie*.

In dimensie twee kan men alleen een rechthoek of een zeshoek verkrijgen als Voronoi-polytoop; in dimensie drie zijn er vijf types, zoals voor het eerst door de kristallograaf Fedorov in de 19e eeuw is bewezen. Zie bijvoorbeeld het artikel *Low-dimensional lattices. VI. Voronoi reduction of three-dimensional lattices* van J. Conway en N. Sloane.

Reductietheorie kan ook worden ingezet om te bewijzen dat in dimensie (ten hoogste) drie elk rooster kan worden verkregen door aan een *metrische graaf* Γ zijn *homologiegroep* $H_1(\Gamma)$ toe te voegen. In dit project zullen we deze constructie bestuderen, en daarvan enkele toepassingen uitwerken. Bijvoorbeeld kunnen we via grafentheorie een alternatief bewijs leveren van een resultaat van E. Barnes en N. Sloane, dat een gesloten formule geeft voor de zogenaamde *quantisatieconstante*

$$I(\Lambda) = \frac{\int_{\text{Vor}(\Lambda)} \|x\|^2 dx}{\int_{\text{Vor}(\Lambda)} dx}$$

van een drie-dimensionaal rooster.

Voorkennis: Algebra 1, Lineaire Algebra 1 en 2, Topologie. Het college Introduction to Algebraic Topology is nuttig maar niet noodzakelijk.