DE STELLING VAN SERRE-SWAN

BRAM MESLAND

Zij X een compacte topologische Hausdorff ruimte en $\mathbb{F}$ een van de lichamen $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$. Een *lokaal triviale vector bundel* over X is een topologische ruimte E tezamen met een surjectieve continue afbeelding $\pi : E \to X$, zodanig dat X een open overdekking $\{U_i\}$ heeft waarvoor $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{F}^n$. In het bijzonder is iedere vezel van de afbeelding π een $\mathbb{F}$-vectorruimte. Vectorbundels komen veelvuldig voor in de meetkunde. Bijvoorbeeld als X een differentieerbare varieteit (manifold) is, dan zijn de raakbundel en de bundels van differentiaalvormen op X lokaal triviale vector bundels.

De verzameling van continue secties,

$$\Gamma(X,E) := \{s : X \to X : \pi \circ s = \mathrm{Id}_X\},$$

is een moduul over de ring $C(X,\mathbb{F})$ van continue $\mathbb{F}$-waardige functies op X. De modulen $\Gamma(X,E)$ zijn eindig voortgebracht over $C(X,\mathbb{F})$. Verder hebben de opmerkelijke algebraische eigenschap dat ze *projectief* zijn. Een moduul M over een ring R heet projectief als er een R-moduul N en een natuurlijk getal k bestaan zodanig dat $M \oplus N \simeq R^k$. Hier staat R^k voor het *vrije moduul van rang k*.

De stelling van Serre-Swan zegt dat het algebraische en het meetkundige perspectief equivalent zijn:

1. Stelling (Serre-Swan)**.** *Zij X een compacte Hausdorffruimte. Er is, op isomorfisme na, een 1-1 correspondentie tussen de eindig dimensionale, lokaal triviale $\mathbb{F}$-vector bundels over X en de eindig voortgebrachte projectieve modulen over $C(X,\mathbb{F})$. Deze correspondentie wordt geimplementeerd door aan een vector bundel E het moduul van secties $\Gamma(X,E)$ toe te kennen.*

De stelling een fundamenteel voorbeeld van een van de vele correspondenties tussen algebra en meetkunde. Het doel van dit project is de stelling en het bewijs ervan te begrijpen en de consequenties ervan te doorgronden. Daarna kunnen we naar verfijningen kijken, bijvoorbeeld voor differentieerbare varieteiten. Ook kunnen we voorbeelden van algebraische constructies beschouwen die topologische invarianten beschrijven, zoals de Grothendieck groep van vector bundels. Een element in deze groep is bijvoorbeeld de Euler karakteristiek van X.

Voorkennis: Algebra en Topologie. Kennis van Reele Analyse en Differentieerbare Varieteiten is een voordeel, maar niet noodzakelijk.