Huiswerkset 5 LA1NA - Inleverdatum: 16 december, voor 9:00 AM.

Opgave 1. Voor elk reëel getal a beschouwen we de matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bepaal M_a^{-1} voor alle a waarvoor $\det(M_a) \neq 0$.
Er is een uniek reëel getal a zodat M_a eigenwaarden $\lambda_1 = 4$ en $\lambda_2 = -1$ heeft.
(ii) Bepaal deze a en bepaal voor deze a de eigenvectoren van M_a.
Er is ook een uniek reëel getal a zodat $\mathbb{R}^2$ geen basis bestaande uit eigenvectoren voor M_a heeft.
(iii) Voor een bonuspunt: bepaal deze a en bepaal voor deze a de eigenvectoren van M_a.

Opgave 2. Laat $G_0 = 0, G_1 = 1$ en definieer G_k voor $k \geq 2$ door $G_k = -2G_{k-1} + 3G_{k-2}$. We hebben dus $G_2 = -2$ en $G_3 = 7$.
(i) Geef een 2×2-matrix A zodat voor alle $k \geq 0$ geldt:

$$\begin{pmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wat zijn de eigenwaarden en eigenruimten van A?
(iii) Geef een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D zodat $A = CDC^{-1}$.
(iv) Geef een gesloten formule voor G_k.

Opgave 3. Bekijk de lijn $L = \text{span}(1, 0, -2)$ in $\mathbb{R}^3$. Zij $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de loodrechte projectie op L. In Huiswerk 4 heb je de standaardmatrix van P bepaald, en we doen dat nu op een alternatieve manier.
(i) De lineaire afbeelding P heeft twee eigenwaarden: 0 en 1. De bijbehorende eigenruimten zijn 2- resp. 1-dimensionaal. Bepaal een basis $\{v_1, v_2\}$ van de eigenruimte bij 0, en een basis $\{v_3\}$ van de eigenruimte bij 1.
Zij C de 3×3-matrix verkregen door als j-e kolom de vector v_j te nemen.
(ii) Geef C en bepaal C^{-1}.
Laat D de diagonaalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zijn.
(iii) Bereken de matrix $A = CDC^{-1}$. Dit is de standaardmatrix van P.

Opgave 4. Geef de algemene oplossing van het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 2x_1(t) & & & & \\ x_2'(t) & = & 2x_1(t) & - & 2x_2(t) & - & 3x_3(t) \\ x_3'(t) & = & -2x_1(t) & + & 4x_2(t) & + & 5x_3(t) \end{array}.$$