

DE STELLING VAN VAN DER WAERDEN

Jan-Hendrik Evertse

Een r -kleuring van een verzameling \mathcal{S} is een surjectieve afbeelding $\mathcal{S} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ (anders gezegd: een verdeling van \mathcal{S} in r niet-lege deelverzamelingen). Een *eindige kleuring* van \mathcal{S} is een r -kleuring voor zekere r .

Een deelverzameling \mathcal{T} van \mathcal{S} heet *monochroom* als met de gegeven kleuring, alle elementen van \mathcal{T} dezelfde kleur hebben (dat wil zeggen, hetzelfde beeld onder de bovengenoemde afbeelding). Een rekenkundige rij van lengte k is een rijtje getallen $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d$ waarbij a en d gehele getallen zijn, en $d > 0$. De beroemde stelling die van der Waerden in 1927 bewees luidt als volgt:

Stelling. *Voor elk positief geheel getal k geldt het volgende: voor elke eindige kleuring van $\mathbb{Z}_{>0}$ bevat $\mathbb{Z}_{>0}$ een monochrome rekenkundige deelrij van lengte k .*

Voorbeeld. Voor elke 2-kleuring zwart/wit van $\mathbb{Z}_{>0}$ bevat $\{1, 2, \dots, 9\}$ of een witte rekenkundige rij of een zwarte rekenkundige rij van lengte 3. Dit geldt niet voor $\{1, \dots, 8\}$: als we bijvoorbeeld 1, 2, 5, 6 zwart kleuren en 3, 4, 7, 8 wit, dan is er onder $\{1, \dots, 8\}$ geen rekenkundige rij van lengte 3 waarvan alle termen zwart zijn of alle termen wit.

De stelling van van der Waerden is op allerlei verschillende manieren bewezen (combinatorisch, algebraïsch, topologisch, analytisch). Verder zijn er allerlei generalisaties van van der Waerden's stelling. Bijvoorbeeld de Duitser Rado bekeek stelsels lineaire vergelijkingen

$$C\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}_{>0}^k$$

met C een $n \times k$ -matrix met elementen uit \mathbb{Z} , en gaf in zijn proefschrift van 1933 een nodige en voldoende voorwaarde in termen van C opdat dit stelsel *regulier* is, dat wil zeggen dat het stelsel voor elke eindige kleuring van $\mathbb{Z}_{>0}$ een oplossing heeft met x_1, \dots, x_k van dezelfde kleur.

Het doel van het bachelor-project is om een of meer bewijzen van de stelling van van der Waerden en eventuele generalisaties door te nemen.