

MUNTEN LATEN OMVALLEN OP METRIC GRAFEN

DAVID HOLMES

Zei $\Gamma = (V, E)$ een eindig graf, zonder loops en zonder parallel kanten. Een *divisor* op Γ is een functie $D: V \rightarrow \mathbb{Z}$; we noemen D *effective* als alle $D(v) \geq 0$.

De *valence* $\text{val}(v)$ van een vertex v is het aantal kanten die v raakt.

Laat D een divisor, en v een vertex. We kunnen een nieuwe divisor D' definiëren door het formule:

$$(1) \quad \begin{aligned} D'(v) &= D(v) - \text{val}(v) \\ D'(u) &= D(u) + 1 \text{ voor alle } u - v \\ D'(u) &= D(u) \text{ all andere } u. \end{aligned}$$

De *graad* van D is $\text{graad}(D) = \sum_{v \in V} D(v)$. Merk op dat $\text{graad}(D) = \text{graad}(D')$.

Als D effectief is kunnen we het zien as een stapel munten op elk vertex. Stel v een vertex met $D(v)$ minstens de valence van v . Dan kunnen we de stapel munten op v laten omvallen, die leidt tot een nieuwe effective divisor D' zoals in de bovenstaande formule. Dus heet dit procedure ‘munten laten omvallen’ (‘chip firing’) op v .

Deze procedure heet de ‘chip firing game’ https://en.wikipedia.org/wiki/Chip-firing_game, en leidt tot veel toepassingen in de getallentheorie en natuurkunde (https://www.universiteitleiden.nl/binaries/content/assets/science/mi/scripties/master/algant/2016-2017/noordman-master_thesis.pdf, https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-05404-9_4.pdf, https://en.wikipedia.org/wiki/Abelian_sandpile_model).

Een divisor D is *succesvol* als voor elk v er bestaat een rij (v_1, \dots, v_n) van vertexes zodra dat, na laten eerste v_1 , dan v_2 , ezv. omvallen, de uitkomende divisor D' is effectief en heeft $D'(v) \geq 1$. De *gonaliteit* van Γ is de minimaale graad van een succesvolle divisor op Γ .

Stel nu dat Γ is een *metric* graf; elke kant heeft een lengte, die kunnen een (positive) hele getal, of (positive) reële nummer zijn, or in het algemeen een niet-eenheid element van een fs abelse monoid. We kunnen de definities van ‘munten omvallen’ en ‘gonaliteit’ tot deze gevallen generaliseren; om deze dingen netjes te schrijven is het eerste doel van het project. Daarna zou het heel interessant zijn om in deze gevallen algoritmes te zoeken om de gonaliteit te begrenzen of rekenen.