Fundamentaalgroepen van matrixgroepen (begeleider: R. de Jong)

Zij G een groep met groepsbewerking $m\colon G \times G \to G$ en inverse $i\colon G \to G$. Neem aan dat G voorzien is van een topologie. We noemen G een *topologische groep* als de afbeeldingen m en i continu zijn. Hierbij is $G \times G$ voorzien van de producttopologie.

Belangrijke voorbeelden van topologische groepen zijn *matrixgroepen* zoals $GL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $U_n(\mathbb{C}), \ldots$ Als eerste stap in dit project zal worden nagegaan hoe de topologie op dit soort groepen is gegeven, en kunnen we onderzoeken hoe het zit met samenhang, wegsamenhang, compactheid, homotopietype, ... van deze topologische ruimten. Zaken als Gauss eliminatie en het Gram-Schmidt proces zoals bekend uit de lineaire algebra spelen hierbij een mogelijke rol.

Aan het eind van het college Topologie is de *fundamentaalgroep* van een topologische ruimte (voorzien van een basispunt) gedefinieerd en is een aantal belangrijke voorbeelden van fundamentaalgroepen de revue gepasseerd. In het vervolgcollege Inleiding in de Algebraïsche Topologie is de theorie van de fundamentaalgroep verder ontwikkeld, waarbij onder andere een verband is gelegd met de theorie van *overdekkingsruimten*.

Merk op dat een topologische groep G op natuurlijke wijze van een basispunt is voorzien, namelijk het neutrale element voor de groepsbewerking. Het doel van dit project is om de eigenschappen te onderzoeken, en voorbeelden te geven, van fundamentaalgroepen van topologische groepen, met de nadruk op matrixgroepen zoals hierboven.

Het is om te beginnen een leuke opgave om te bewijzen dat de fundamentaalgroep van een topologische groep *abels* is. Met wat categorietheorie (waarover we meer zullen horen tijdens het seminarium) kan hier zelfs een éénregelig “abstract nonsense” bewijs voor worden gegeven. Is het interessant om dit verder te verkennen?

Zij G een topologische groep en veronderstel dat G samenhangend, lokaal wegsamenhangend en semilokaal enkelvoudig samenhangend is. Onder deze voorwaarden bezit G een *universele overdekkingsruimte* $\widetilde{G} \to G$. We zullen bewijzen dat $\widetilde{G}$ ook weer van de structuur van een topologische groep kan worden voorzien. Als G een matrixgroep is, is $\widetilde{G}$ dat dan ook?

De fundamentaalgroep van de speciale orthogonale groep $SO_3(\mathbb{R})$ is een groep van orde twee. In de natuurkunde vertaalt zich dit feit in het verschijnsel “spin”. De universele overdekkingsruimte $\widetilde{SO_3(\mathbb{R})} \to SO_3(\mathbb{R})$ (die dus twee-bladig is) kan expliciet worden opgeschreven en er blijkt hier een interessante link te zijn met de *quaternionen van Hamilton*. Als onderdeel van dit project kan dit verband worden uitgewerkt en kunnen we kijken naar hoe het zit met de hoger-dimensionale varianten $SO_n(\mathbb{R})$.

Voorkennis: Algebra 1, Lineaire Algebra 1 en 2, Topologie. Het is nuttig het college Inleiding in de Algebraïsche Topologie gevolgd te hebben maar eventueel kan de hieruit benodigde theorie als onderdeel van het project worden opgezet.