Inverse Galoistheorie (Begeleider: Martin Bright)

Een natuurlijk probleem dat uit de Galoistheorie volgt is: welke eindige groepen komen als Galoisgroepen van eindige uitbreidingen van $\mathbb{Q}$ voor? Dit is het probleem van *inverse Galoistheorie.* Het is nog niet bekend of alle eindige groepen Galoisgroepen over $\mathbb{Q}$ kunnen zijn.

Voor de symmetrische groepen S_n is het wel waar. Een manier om dit te bewijzen is als volgt. Neem het lichaam $K = \mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ waar $a_0, \ldots, a_{n-1}$ onafhankelijke variabelen zijn, dat is, K is een zuivere transcendente uitbreiding van $\mathbb{Q}$. Zij L/K een ontbindingslichaam voor het *algemene polynoom*

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in K[X]$$

Dan is het makkelijk te bewijzen, met behulp van de hoofdstelling voor symmetrische polynomen, dat L/K Galois is met $\mathrm{Gal}(L/K) = S_n$. Nu is het doel om te laten zien dat, door specifieke rationale waarden in plaats van $a_0, \ldots, a_{n-1}$ in te vullen, dat "bijna altijd" een uitbreiding van $\mathbb{Q}$ met Galoisgroep S_n wordt verkregen. Dit volgt van de beroemde *irreducibiliteitsstelling van Hilbert.*

Om deze techniek ook voor andere groepen te kunnen gebruiken is het nodig om uitbreidingen van functielichamen met andere Galoisgroepen te vinden. Voorbeelden van zulke uitbreidingen zijn functielichamen van algebraïsche variëteiten, en daardoor komt een relatie met fundamentele groepen van algebraïsche krommen.

Referenties

[1] G. Malle and B. Matzat, *Inverse Galois Theory.* Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 1999.

[2] J.-P. Serre, *Topics in Galois Theory.* Volume 1 of Research Notes in Mathematics, Jones and Bartlett, 1992.

[3] H. Völklein, *Groups as Galois Groups.* Volume 53 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1996.