

# PERFECTOÏDE LICHAMEN

BEGELEIDER: MISJA STEINMETZ

In 2011 zette de toen 23-jarige Peter Scholze de wereld van de getaltheorie op zijn kop met zijn nieuwe theorie van *perfectoïde ruimtes* [1]. Scholzes theorie zorgde voor een explosie aan nieuw onderzoek en vele groepen van (veelal jonge) onderzoekers wereldwijd die zijn ideeën gebruikten om nieuwe interessante stellingen te bewijzen in getaltheorie en *arithmetische meetkunde*. In 2018 kreeg Scholze een Fieldsmedaille voor dit en hierop voortbouwend werk.

In deze bachelorscriptie willen we graag perfectoïde ruimtes van één punt bestuderen, namelijk zogenaamde *perfectoïde lichamen*. Dit zijn complete, topologische lichamen  $K$  zodat de topologie geïnduceerd wordt door een niet-discrete valuatie van rang 1 en de Frobenius surjectief is op  $K^\circ/p$  (waar  $p$  de restklassenarakteristiek is van  $K$  is en  $K^\circ$  staat voor de verzameling van *machtsbegrensde* elementen). Een voorbeeld van zo een lichaam is de completering van  $\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ . Perfectoïde lichamen splitsen mooi op in lichamen van karakteristiek 0 en van karakteristiek  $p$ . Elk perfectoïde lichaam van karakteristiek 0 komt hand in hand met een tegenhanger van karakteristiek  $p$  en vice-versa. Zo'n tegenhanger noemen we de *tilt* (of *kanteling*) van het lichaam. Een perfectoïde lichaam en zijn kanteling laten bijzonder veel van dezelfde eigenschappen zien, zo zijn hun absolute Galois groepen bijvoorbeeld kanoniek isomorf en bestaat er een equivalentie van algebras over de twee lichamen. Dit is een van de aspecten die de theorie zo belangrijk maken.

Voor dit project zal de student eerst de theorie van lokale lichamen moeten bestuderen. Daarna kan de student toewerken naar het doorgronden van de definitie van perfectoïde lichamen en het geven van een aantal voorbeelden. De student zou daarna de kantelingsfunctor kunnen definiëren en voorbeelden kunnen geven van kantelingen van perfectoïde lichamen. Afhankelijk van de voorkeuren van de student zou deze vervolgens kunnen kijken naar het bovengenoemde isomorfisme van Galoisgroepen of de equivalentie van algebras.

In dit project komen technieken voor uit algebra, getaltheorie en meetkunde. Daarom is het van belang dat de student in ieder geval Algebra 1, 2, 3 en Topologie heeft gevolgd. Daarnaast lijkt het me handig dat de student ook een beetje affiniteit had met deze vakken, vooral met Galoistheorie (Algebra 3). Een deel van de theorie die je voor dit project moet leren zal zeker terugkomen in mastervakken in deze richting.

De voornaamste referentie voor dit project is Scholzes originele artikel [1]. Er zijn ook online referenties te vinden zoals het *Stanford learning seminar on Perfectoid Spaces* (<http://math.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/>) en de *Arizona Winter School* van 2017 (<http://swc.math.arizona.edu/aws/2017/index.html>). Hoewel dit zeker haalbaar is, zijn er voor zover ik weet geen referenties geschreven op het niveau van een derdejaars bachelorstudent. Daar ligt dan ook een mooie uitdaging voor de student om deze stof te doorgronden en als eerste begrijpelijk op te schrijven op dit niveau.

## REFERENCES

- [1] Peter Scholze, *Perfectoid Spaces*, Publ. math. de l'IHÉS 116 (2012), no. 1, 245–313.

KANTOOR 227A, MATHEMATISCH INSTITUUT, NIELS BOHRWEG 1, 2333 CA, LEIDEN  
Email address: m.f.a.steinmetz@math.leidenuniv.nl