

Hoeken en kromming in genormeerde ruimten

In een inproductruimte kan men hoeken tussen lijnstukken definiëren met behulp van het inproduct. Aleksandrov heeft een methode ontwikkeld om hoeken te definiëren in willekeurige genormeerde ruimten. Bekijk een punt x in een genormeerde ruimte E en twee lijnstukken ℓ en m vanuit x . We kiezen een punt y op ℓ en een punt z op m en bekijken de “driehoek” xyz . De zijden van deze driehoek zijn $\|x - y\|$, $\|y - z\|$ en $\|z - x\|$. In het Euclidische vlak is er een driehoek waarvan de zijden precies deze lengten hebben. Deze driehoek heeft een goed gedefinieerde hoek α bij het punt behorende bij x . We bekijken de verzameling A van alle hoeken α die we zo kunnen maken. De hoek van de lijnstukken ℓ en m is nu gedefinieerd als het supremum $\sup A$.

In een “driehoek” in E zijn er drie hoeken. De som van de hoeken is een maat voor de lokale kromming van E . Als de som groter is dan π dan is de ruimte bol en als de som kleiner is dan π hol. De som is altijd gelijk aan π dan en slechts dan als de ruimte een inproductruimte is.

Kunnen hoeken tussen lijnstukken in verschillende genormeerde ruimten expliciet uitgerekend worden? Bijvoorbeeld in ℓ^p ? Hoe groot kan de kromming maximaal worden? En hoe klein minimaal? Is er een verband met de kromming van het oppervlak van de eenheidsbol van de ruimte?

Aleksandrov’s originele definitie was algemener en geldt in metrische ruimten. Lijnstukken moeten dan vervangen worden door geodeten. Er kan eventueel gekeken worden naar andere metrische ruimten dan genormeerde ruimten.

Onno van Gaans
Bachelor Seminarium ASB
voorjaar 2009